

INTEGRALES

INDEFINIDAS

ÍNDICE:

- 1.- FUNCIÓN PRIMITIVA.
- 2.- INTEGRAL INDEFINIDA.
- 3.- INTEGRALES INMEDIATAS.
 - 3.1.- INTEGRACIÓN INMEDIATA DE ALGUNAS FUNCIONES.
- 4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.
- 5.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.
- 6.- INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN.
- 7.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE.
- 8.- INTEGRACIÓN POR PARTES.
- 9.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.
 - 9.1.- FRACCIONES RACIONALES PROPIAS.
 - RAÍCES REALES SIMPLES.
 - RAÍCES REALES MÚLTIPLES.
 - RAÍCES IMAGINARIAS SIMPLES.
 - RAÍCES IMAGINARIAS COMPUESTAS.
 - 9.2.- CASO DE FRACCIONES RACIONALES IMPROPIAS.
- 10.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

1.- FUNCIÓN PRIMITIVA

En los temas anteriores se ha estudiado como puede obtenerse la función derivada de una función dada. En ocasiones se presenta la necesidad de llevar a cabo el proceso contrario, esto es, dada una función hallar otra, denominada "Función Primitiva", cuya derivada sea la primera.

Función primitiva de una función dada: $f(x)$, es otra función: $F(x)$, cuya derivada es la primera.

$$F(x) = \text{función primitiva de } f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Ejemplo: $F(x) = \ln x$, es función primitiva de: $f(x) = 1/x$, ya que la derivada de $\ln x$ es $1/x$

2.- INTEGRAL INDEFINIDA

No todas las funciones poseen función primitiva, ya que dada una función puede no existir otra que la tenga por derivada.

Ahora bien, cuando una función: $f(x)$, posee función primitiva: $F(x)$, ésta no es única, sino que existen infinitas funciones primitivas: todas las que difieren de $F(x)$ en una cantidad constante.

En efecto, si $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$, se verifica que: $F'(x) = f(x)$, pues bien, la función $F(x) + C$, donde C es un número real cualquiera, también es una función primitiva de $f(x)$, ya que:

$$[F(x) + C]' = [F(x)]' + [C]' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$$

El conjunto formado por todas las funciones primitivas de una función $f(x)$ se denomina integral indefinida de $f(x) dx$. La integral indefinida se representa por:

$$\int f(x) dx$$

De lo expuesto se deduce que la integración indefinida es la operación inversa de la diferenciación, ya que consiste en hallar todas las funciones cuya diferencial sea una dada.

Ejemplos:

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \cos x dx = \text{sen } x + C$$

$$\int \text{sen } x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

3.- INTEGRALES INMEDIATAS

Integrales inmediatas son aquellas cuyo resultado puede obtenerse mentalmente, sin más que considerar (a la inversa) las reglas de derivación.

A continuación mostraremos las integrales inmediatas de uso más frecuente:

$$a) \int dx = x + c$$

$$b) \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$d) \int e^x dx = e^x + C$$

$$e) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$f) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$g) \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$h) \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$i) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$j) \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$k) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$l) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

3.1.- INTEGRACIÓN INMEDIATA DE ALGUNAS FUNCIONES DE FUNCIONES

Sean $y = f(u)$, $u = u(x)$ dos funciones continuas. La función $y = f(u(x))$ es una función de función.

Supuesto que $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$ respecto a u ; es decir se cumple

$$\frac{d}{du} F(u) = f(u) \Rightarrow \int f(u) du = F(u) + C$$

como $du = u'(x)dx$, sustituyendo resulta

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u) + C$$

Si Conjugamos dicho resultado con la tabla de integrales indefinidas vista anteriormente, obtendremos una serie de integrales calificadas también de **integrales inmediatas** para $u = u(x)$:

$$\text{a) } \int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} \cdot u^{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\text{b) } \int \frac{u'}{u} dx = \ln x + C$$

$$\text{c) } \int \frac{u'}{1+u^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} u + C \\ -\operatorname{arc} \cot x + C \end{cases}$$

$$\text{d) } \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} x + C \\ -\operatorname{arccos} x + C \end{cases}$$

$$\text{e) } \int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^u + C$$

$$\text{f) } \int e^u \cdot u' dx = e^u + C$$

$$\text{g) } \int \operatorname{sen} u \cdot u' dx = -\operatorname{cos} u + C$$

$$\text{h) } \int \operatorname{cos} u \cdot u' dx = \operatorname{sen} u + C$$

$$\text{i) } \int \operatorname{tg} u \cdot u' dx = -\ln|\operatorname{cos} u| + C$$

$$\text{j) } \int \operatorname{cot} u \cdot u' dx = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\text{k) } \int \frac{u'}{\operatorname{cos}^2 u} dx = \operatorname{tg} u + C$$

$$\text{l) } \int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{cot} u + C$$

4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

De las reglas de derivación del producto de una constante por una función, de una suma de funciones y de una diferencia de funciones, se deducen las siguientes propiedades de la integral indefinida:

- 1ª.- La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Ejemplo: $\int 5 \cos x dx = 5 \cdot \int \cos x dx = 5 \operatorname{sen} x + c$

- 2ª.- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones sumando.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Ejemplo: $\int (\operatorname{sen} x + \cos x) dx = \int \operatorname{sen} x dx + \int \cos x dx = -\cos x + \operatorname{sen} x + C$

- 3ª.- la integral de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de las integrales de las funciones minuyendo y sustraendo.

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

- 4ª.- Como consecuencia de las dos propiedades anteriores:

La integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de todas y cada una de las funciones sumandos.

Ejemplo: $\int (x^2 - x + 1) dx = \int x^2 dx - \int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$

5.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Para la resolución de integrales se utilizan diferentes artificios de cálculo, cuyo objeto es transformar la expresión a integrar en otra, u otras, de integración más sencilla. A dichos artificios se les denominan métodos de integración. En este tema vamos a estudiar los siguientes:

- Integración por descomposición en sumandos.
- Integración por cambio de variable.
- Integración por partes.

- Integración de funciones trigonométricas.

- integración de funciones racionales.

6.- INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN SUMANDOS

Como su nombre indica, este método consiste en descomponer en sumandos la integral a resolver aplicando a continuación las propiedades anteriormente enunciadas.

Ejemplo:

$$\int (x + 1)^2 dx$$

Desarrollando la potencia del binomio y aplicando las propiedades anteriormente expuestas se obtiene:

$$\begin{aligned} \int (x + 1)^2 dx &= \int (x^2 + 2x + 1) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c \end{aligned}$$

7.- INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE O SUSTITUCIÓN

Un método útil en ocasiones es el de cambio de variable o sustitución. Este consiste, en líneas generales, en tomar una nueva variable, t , tal que $x = g(t)$ sea una función continua y que admita función inversa: $t = g^{-1}(x)$

Como de $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t) \cdot dt$, sustituyendo en $I = \int f(x) dx$

$$I = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

De esta forma se ha transformado la integral indefinida en otra, función de la nueva variable t .

Si la elección de la variable t ha sido acertada, la integral resultante es más sencilla de integrar. El éxito de la integración depende, en grado considerable, de la habilidad para elegir la sustitución adecuada de la variable.

Una vez obtenida la función primitiva, $F(t) + C$, se deshace el cambio de la variable substituyendo $t = g(x)$.

Así se tiene la integral indefinida en función de la variable inicial x .

Ejemplo: $I = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$ Cambio: $x - 1 = t \rightarrow dx = dt$

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + c$$

Deshaciendo el cambio: $t = x-1 \Rightarrow \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + c$

***Ejercicios propuestos:**

a) $\int (4x-2)^5 dx$ Cambio: $4x-2=t$ b) $\int x \cdot (3x^2+1) dx$ Cambio: $3x^2+1=t$ c) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx$ Cambio: $x^2+x-3=t$

d) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{8+x^2}}$ Cambio: $\sqrt{8+x^2}=t$ e) $\int 2x\sqrt{1+3x^2} dx$ Cambio: f) $\int (x^2-3x+2) \cdot (2x-3)$ Cambio:

g) $\int x \cdot \text{sen } x^2 dx$ Cambio: $x^2=t$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$ Cambio: $\sqrt{x}=t$ i) $\int \frac{x dx}{(x+1) \cdot (x-1)}$ Cambio: $x^2-1=t$

j) $\int \frac{\text{arcsen } x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ Cambio: $\text{arcsen } x=t$ k) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ Cambio: $\ln x=t$ l) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ Cambio: $x=t^2$

m) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$ Cambio: $1-3x=t^3$ n) $\int \frac{x-3}{x^2+49} dx$ Cambio: $x=7t$ o) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ Cambio: $x^2=t$

p) $\int \frac{3 dx}{(2x+3)^3}$ Cambio: $2x+3=t$ q) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$ Cambio: $x=2\text{sent}$ r) $\int \frac{x dx}{3-2x^2}$ Cambio: $3-2x^2=t$

8.- INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean $u = u(x)$, $v = v(x)$ dos funciones variables en un intervalo $[a,b]$ (o en todo \mathbb{R}).
Como

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

de donde

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$

Integrando los dos miembros de la igualdad

$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \Rightarrow$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

La expresión obtenida, denominada *fórmula de integración por partes*, se utiliza para transformar una integral en otra. Transformación que será útil como método de integración cuando la integral del segundo miembro sea inmediata o, al menos, más sencilla que la del primer miembro.

Al igual que en el método anterior, no existe normativa alguna que sirva para determinar qué integrales es conveniente resolver por partes, como tampoco para una vez adoptado este método fijar qué factor debe hacerse igual a u .

Ejemplo: $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$. Considerando que la derivada de x es la unidad y que la integral de $\text{sen } x$ es inmediata, hacemos:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \text{sen } x \, dx \Rightarrow v = \int \text{sen } x \, dx = -\cos x$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de integración por partes y resolviendo la integral que aparece, resulta:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \Rightarrow \int x \cdot \text{sen } x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \, dx$$

$$\int x \cdot \text{sen } x \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + c$$

***Ejercicios propuestos:**

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int \ln x \, dx & \text{b) } \int x \cos x \, dx & \text{c) } \int x \ln x \, dx & \text{d) } \int \ln^2 x \, dx \\ \text{e) } \int \cos^2 x \, dx & \text{f) } \int e^x \operatorname{sen} x \, dx & \text{g) } \int x^2 e^{ax} \, dx & \end{array}$$

9.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Objeto de estudio es la integración de funciones racionales, funciones del tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas.

9.1.- FRACCIONES RACIONALES PROPIAS. DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es *fracción racional propia* si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$.

En este caso el método a seguir es su descomposición en fracciones simples, dado que se demuestra que toda fracción racional propia se puede descomponer en fracciones racionales simples.

El primer paso a realizar es descomponer factorialmente el denominador, $g(x)$.

Puede ocurrir que existan *raíces reales simples, raíces reales múltiples, raíces complejas simples o raíces complejas múltiples*.

Según los distintos casos se tienen las siguientes descomposiciones:

RAÍCES REALES SIMPLES:

$$\frac{f(x)}{(x-a) \cdot (x-b)} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{x-b} \Rightarrow$$

$$\int \frac{f(x)}{(x-a) \cdot (x-b)} dx = \int \frac{a_1}{x-a} dx + \int \frac{a_2}{x-b} dx$$

RAÍCES REALES MÚLTIPLES:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n \cdot (x-b)^m} = \frac{a_1}{x-a} + \frac{a_2}{(x-a)^2} \dots + \frac{a_n}{(x-a)^n} + \dots + \frac{b_1}{x-b} + \frac{b_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{b_m}{(x-b)^m}$$

$$\int \frac{f(x)}{(x-a)^n \cdot (x-b)^m} dx = \int \frac{a_1}{x-a} dx + \int \frac{a_2}{(x-a)^2} dx + \dots + \int \frac{a_n}{(x-a)^n} dx + \dots + \int \frac{b_1}{x-b} dx + \int \frac{b_2}{(x-b)^2} dx + \dots + \int \frac{b_m}{(x-b)^m} dx$$

RAÍCES IMAGINARIAS SIMPLES:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + cx + d) \cdot (x^2 + ex + f)} = \frac{mx + n}{x^2 + cx + d} + \frac{px + q}{x^2 + ex + f}$$

$$\int \frac{f(x)}{(x^2 + cx + d) \cdot (x^2 + ex + f)} dx = \int \frac{mx + n}{x^2 + cx + d} dx + \int \frac{px + q}{x^2 + ex + f} dx$$

RAÍCES IMAGINARIAS COMPUESTAS:

$$\frac{f(x)}{(x^2 + cx + d)^r \cdot (x^2 + ex + f)^a} = \frac{m_1x + n_1}{x^2 + cx + d} + \frac{m_2x + n_2}{(x^2 + cx + d)^2} + \dots + \frac{m_r x + n_r}{(x^2 + cx + d)^r} +$$

$$+ \frac{p_1x + q_1}{x^2 + ex + f} + \frac{p_2x + q_2}{(x^2 + ex + f)^2} + \dots + \frac{p_a x + q_a}{(x^2 + ex + f)^a}$$

$$\int \frac{f(x)}{(x^2 + cx + d)^r \cdot (x^2 + ex + f)^a} dx = \int \frac{m_1x + n_1}{x^2 + cx + d} dx + \int \frac{m_2x + n_2}{(x^2 + cx + d)^2} dx + \dots + \int \frac{m_r x + n_r}{(x^2 + cx + d)^r} dx +$$

$$+ \int \frac{p_1x + q_1}{x^2 + ex + f} dx + \int \frac{p_2x + q_2}{(x^2 + ex + f)^2} dx + \dots + \int \frac{p_a x + q_a}{(x^2 + ex + f)^a} dx$$

***EJEMPLOS:**

a) $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

como

$$x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1) \rightarrow \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1); \quad 0x + 1 = (A+B)x + (A-B);$$

identificando coeficientes $\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A - B \end{cases}$ de donde $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$; sustituyendo

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|1+x| + C = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

$$\text{b) } I = \int \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - 2x + 1)x = (x-1)^2 x \rightarrow \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$2x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = (A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A;$$

$$\text{Identificando coeficientes: } \begin{cases} A+B = 2 \\ -2A-B+C = -4 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$I = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$$

9.2.- CASO DE FRACCIONES RACIONALES IMPROPIAS

$\frac{f(x)}{g(x)}$ es *fracción racional impropia* si el grado de $f(x) \geq g(x)$.

Dividiendo el numerador, $f(x)$, por el denominador, $g(x)$, pasamos a una fracción racional propia

$$f(x) = g(x) \cdot c(x) + r(x) \rightarrow \int \frac{f(x) dx}{g(x)} = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx$$

***Ejercicios propuestos:**

$$\text{a) } \int \frac{21x-19}{x^2-5x+4} dx \quad \text{b) } \int \frac{(x-1) dx}{x^3+2x^2+x} \quad \text{c) } \int \frac{dx}{x^4+x^2} \quad \text{d) } \int \frac{dx}{x^2-5x+4}$$

10.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONÓMICAS

En el caso de funciones trigonométricas son precisas, en ocasiones, transformaciones trigonométricas, que las pasan a funciones cuya integración es ya conocida o son más simples.

Son útiles las sustituciones:

$$\text{sen } x = t \quad \text{cos } x = t \quad \text{tg } x = t \quad \text{tg } \frac{x}{2} = t$$

$$\text{Para } \text{sen } x = t \Rightarrow x = \arcsen t; \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \text{tg } x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \quad \text{cos } x = \sqrt{1-t^2}$$

$$\text{Para } \text{tg } x = t \Rightarrow x = \text{arctg } t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \text{sen } x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \text{cos } x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{Para } \text{tg } \frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2 \text{arctg } t; \quad dx = \frac{2t \cdot dt}{1+t^2}; \quad \text{sen } x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \text{cos } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

EJEMPLO:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\text{sen}^4 x} dx$$

$$I = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\text{sen}^4 x} dx = \int \frac{(1 - \text{sen}^2 x) \cdot (\cos x dx)}{\text{sen}^4 x}$$

Hacemos el cambio: $\text{sen } x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$.

$$I = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} = \frac{-1}{3\text{sen}^3 x} + \frac{1}{\text{sen } x} + C$$

***Ejercicios propuestos:**

$$\int \frac{dx}{\text{sen } x} \quad \int \frac{\text{sen}^2 x dx}{2 + \text{cos } x} \quad \int \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x dx \quad \int \text{sen } 5x \cdot \text{sen } 7x dx$$

Cambio: $\text{tg } \frac{x}{2} = t$

Cambio: $\text{cos } x = t$

Cambio: $\text{sen } x = t$

Cambio: $\text{tg } \frac{x}{2} = t$