Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

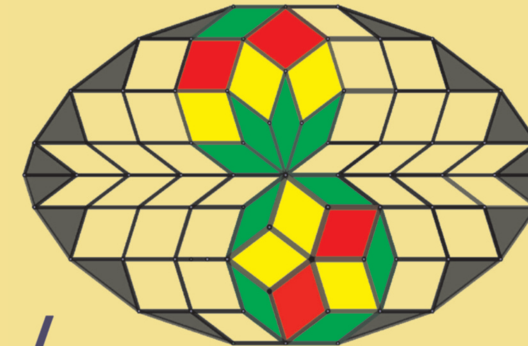
sm

ANAYA

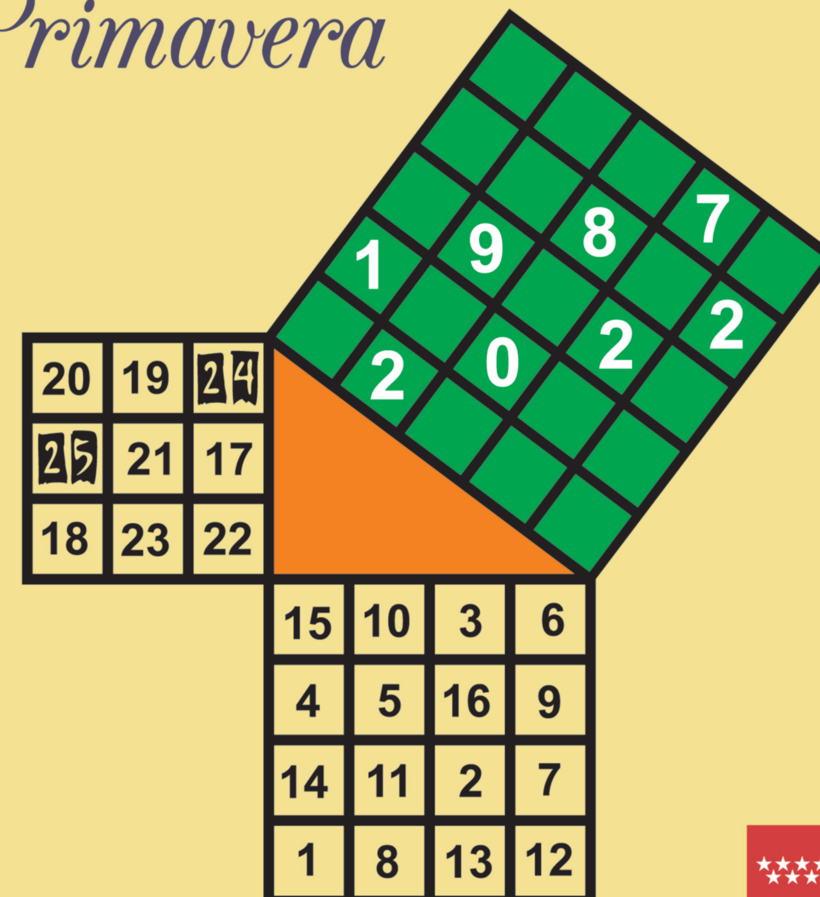
Smartick

Mc Graw Hill Education

25 años Concurso de Primavera

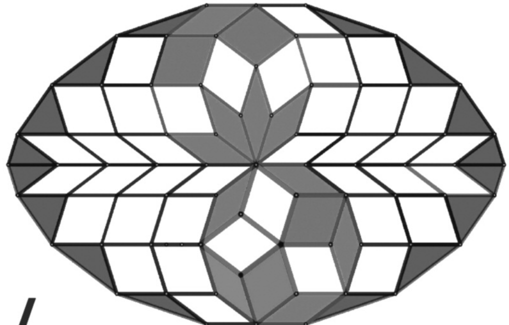


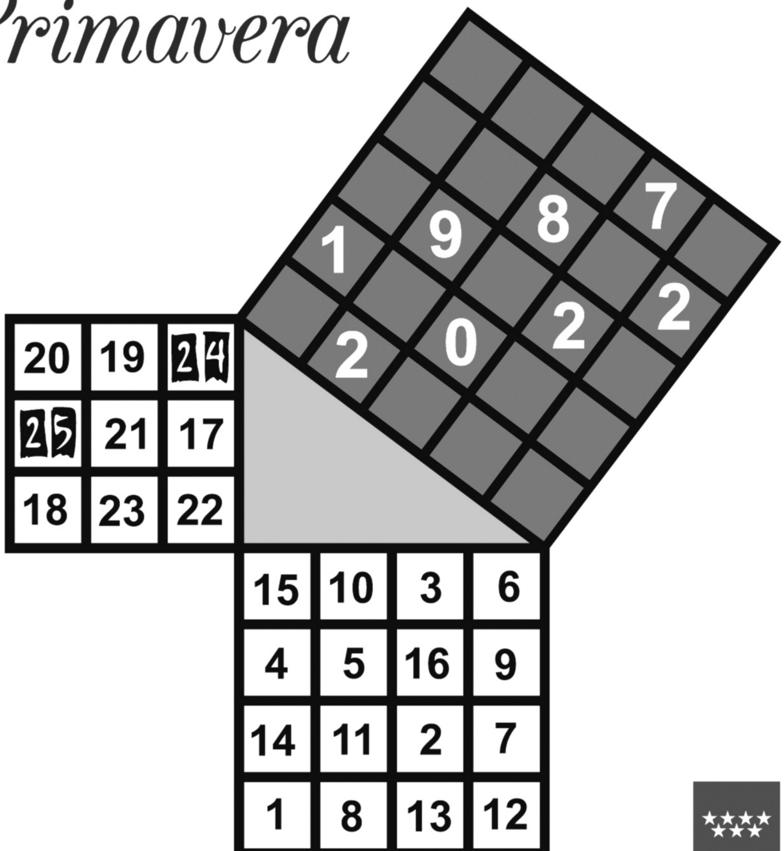
25 años Concurso de Primavera



Comunidad de Madrid

25 años
Concurso de Primavera





Comunidad de Madrid

Comité organizador del Concurso de Primavera

Alzola Bujarrabal, Belén
Baeza Alba, Miguel Ángel
Benito Miguel, Isabel
Castrillón López, Marco
Donaire Moreno, Juan Jesús
Esteban García, María
Ferrero de Pablo, Luis
García Gual, Jesús
Gaspar Alonso-Vega, María
González Ortega, Jorge
Hernández Gómez, Joaquín ❤
❤ *López Álvarez, Francisco*
Martínez Dalmau, Pablo
Martínez Sanz, Alfredo
Montero Estravís, Xiomara
Moreno Warleta, María
Ramírez Carrillo, Carlos
Sánchez Benito, Merche
Sánchez González, Víctor Manuel
Serrano Marugán, Esteban
Soler Areta, Javier
Tomé Grasa, Roberto

Edita:
Asociación Matemática Concurso de Primavera

ISBN:
978-84-606-5943-3

Deposito Legal:
M-9975-2022

[espejismo matemático]

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

Así que han pasado veinticinco años …

En 2021 se cumplieron 25 años desde el inicio en 1987 del I Concurso de Primavera. La pandemia hizo que la edición de 2020 se quedara a medias y nos ha dejado sin la del 2021 (si bien es cierto que en ese tiempo hemos celebrado pruebas online, que se han ofrecido a los centros escolares para su uso y disfrute).

Hemos recobrado el pulso en este año 2022, que debería nominarse XXVI Concurso de Primavera y que acabará siendo el XXV (lo mismo pasó con Luis XVII de Francia, que se terminó llamando XVIII). Así son los números, a veces caprichosos, pero siempre eficaces.

Era nuestra intención, ya hace tiempo, sacar un libro recopilando los mejores problemas (según nuestro juicio) de cada edición y nivel. Hemos puesto más cuidado en la redacción de enunciados, soluciones y también en sus ilustraciones.

Esperamos que el libro sea lanza de escuderos y espejo de caminantes para todos aquellos que un día salieron en busca de la aventura matemática.

El Comité Organizador

AGRADECMIENTOS a

Los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores

Los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase

La Facultad de Matemáticas de la UCM

El vicerrectorado de alumnos de la UCM

La Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

Grupo **ANAYA**
Ediciones **SM**
Mc GRAW- HILL Education
Smartick

ÍNDICE

ENUNCIADOS

SOLUCIONES

Enunciados - Nivel I

1 Nivel I CP I

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

A) 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

2 Nivel I CP I

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.
– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

A) Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana
E) No hay información suficiente

3 Nivel I CP II

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

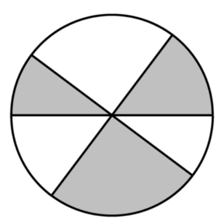
4 Nivel I CP II

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

5 Nivel I CP III

Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:



A) 6π **B)** 12π **C)** 18π
D) 24π **E)** 36π

6 Nivel I CP IV

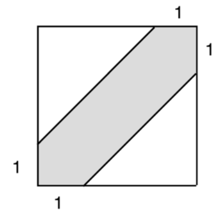
Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

A) 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

7 Nivel I CP IV

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?

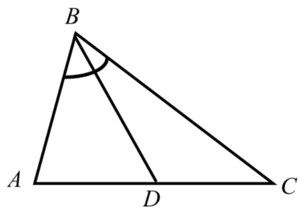
A) 6 m^2 **B)** 7 m^2 **C)** 7,5 m^2
D) 8 m^2 **E)** 8,5 m^2



8 Nivel I CP V

En el triángulo de la figura, los segmentos AD, BD y DC son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en B).

A) 75º **B)** 86º **C)** 90º
D) 92º **E)** Falta información



9 Nivel I CP V

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

10 Nivel I CP VI

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

A) 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

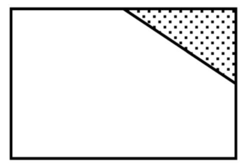
11 Nivel I CP VI

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

12 Nivel I CP VII

El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?



A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$

13 Nivel I CP VII

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

A) Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario

D) Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

14 Nivel I CP VIII

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

A) 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

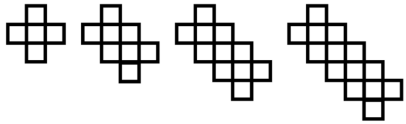
15 Nivel I CP VIII

Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

16 Nivel I — CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



A) 50 **B)** 38 **C)** 32
D) 30 **E)** 29

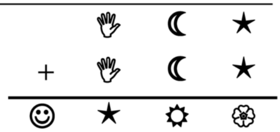
17 Nivel I — CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

A) domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

18 Nivel I — CP X

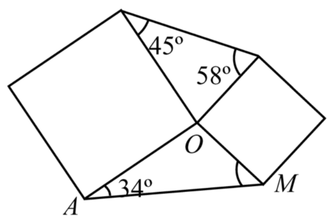
En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?



A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

19 Nivel I — CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:



A) 43º **B)** 39º **C)** 38º
D) 36º **E)** 35º

20 Nivel I — CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

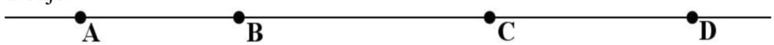
21 Nivel I CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

22 Nivel I CP XII

Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:



La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

A) 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 9

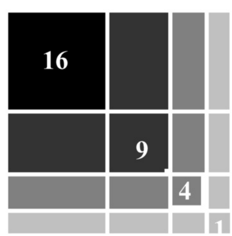
23 Nivel I CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno

24 Nivel I CP XIII

El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 cm^2, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado total?

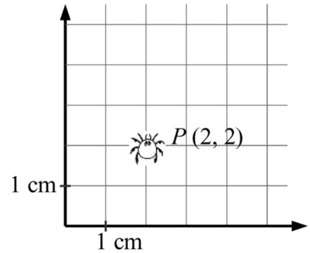


A) 100 **B)** 75 **C)** 64 **D)** 36 **E)** 25

.

25 Nivel I CPXIII

Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?



A) $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$

D) $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$

26 Nivel I CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres

D) Cuatro **E)** Cinco

27 Nivel I CP XIV

En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra x?

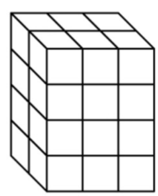
x		
	15	3
12		24

A) 3 **B)** 4 **C)** 5

D) 6 **E)** 7

28 Nivel I CP XV

Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

29 Nivel I CP XV

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

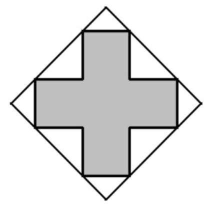
– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

30 Nivel I CP XVI

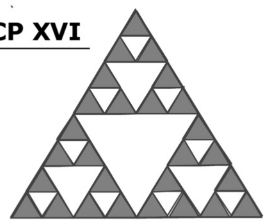
Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



A) 24 **B)** 32 **C)** 36
D) 40 **E)** 48

31 Nivel I CP XVI

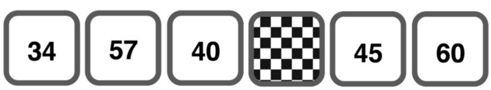
¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?



A) $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

32 Nivel I CP XVII

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?



A) 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

33 Nivel I CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

34 Nivel I CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

¿Cuál de los amigos es el actor?

A) Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

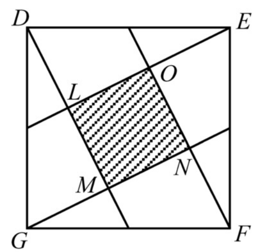
E) No se sabe con certeza

35 Nivel I CP XVIII

En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en cm^2?

A) 20 **B)** 25 **C)** 35

D) 40 **E)** 50



36 Nivel I CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

37 Nivel I CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

38 Nivel I CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

A) Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

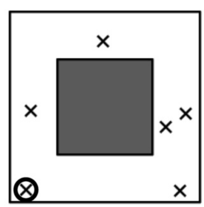
39 Nivel I CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

40 Nivel I CP XX

Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



A) Bea **B)** Carla **C)** Dani
D) Emilio **E)** Fani

41 Nivel I CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

A) 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

42 Nivel I CP XXI

Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.
¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

A) 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

43 Nivel I CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

44 Nivel I CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

777	495	1000	888
301	238	658	735
357	26	764	336
154	343	922	989

A) ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
C) ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
E) ¿La cifra de las unidades es 8?

45 Nivel I CP XXII

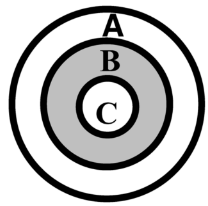
Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

$$\begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ A & D & A & N \\ \hline O & N & D & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ H & A & D & A \\ \hline M & I & M & O \end{array}$$

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

46 Nivel I CP XXIII

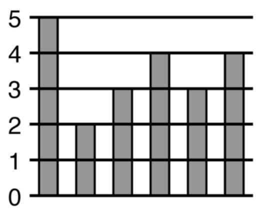
Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?



A) 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54

47 Nivel I CP XXIII

En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?



A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

48 Nivel I CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

A) 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

49 Nivel I CP XXIV

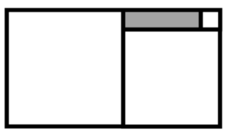
Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

	C	***A***	***T***
D	3		
O	18		
G		14	

A) 38 **B)** 52 **C)** 40 **D)** 56 **E)** 36

50 Nivel I CP XXIV

Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rectángulo gris?

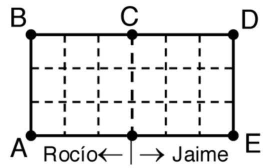


A) 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

Enunciados - Nivel II

1 Nivel II CP I

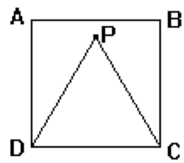
Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:



A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

2 Nivel II CP II

ABCD es un cuadrado y *P* un punto dentro del cuadrado tal que *CDP* es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$?



A) 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º

E) No hay suficiente información

3 Nivel II CP III

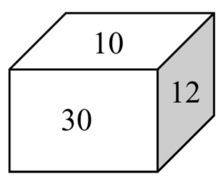
Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de *x*?

			9				x				7		

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

4 Nivel II CP III

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm^2. ¿Cuál es, en cm^3, el volumen de la caja?

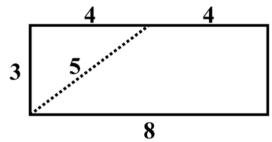


A) 60 **B)** 52 **C)** 3600

D) 300 **E)** 120

5 Nivel II — CP IV

Cortamos un rectángulo de 3×8 en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:



A) 9 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 5

6 Nivel II — CP IV

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

7 Nivel II — CP V

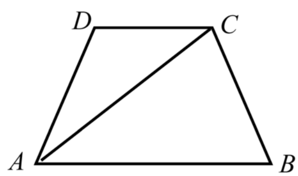
¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

8 Nivel II — CP V

En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?

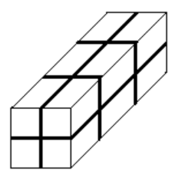
A) 108º **B)** 120º **C)** 130º
D) 150º **E)** Faltan datos



9 Nivel II — CP VI

Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son $10 \times 10 \times 30$ cm, ¿cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?

A) 200 **B)** 240 **C)** 250
D) 260 **E)** 300



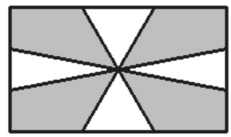
10 Nivel II — CP VI

Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca
D) Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

11 Nivel II — CP VI

La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?



A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

12 Nivel II — CP VII

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

13 Nivel II — CP VII

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

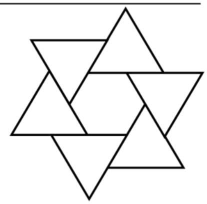
14 Nivel II — CP VIII

En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

A) Cuestan más los discos **B)** Cuestan más los comics
C) Un disco cuesta menos de 3 euros **D)** Un comic y un disco cuestan 4 euros
E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

15 Nivel II CP VIII

El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

16 Nivel II CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5 % **E)** $\frac{1}{12}$

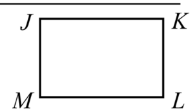
17 Nivel II CP IX

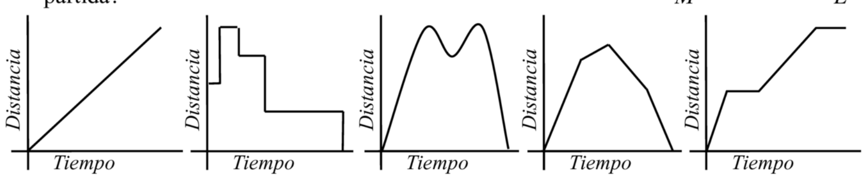
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

18 Nivel II CP X

María sale a correr desde la esquina *J* del campo rectangular *JKLM* yendo en este sentido: *J - K - L - M - J -...* ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

19 Nivel II — CP XI

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

20 Nivel II — CP XII

El número *m* verifica que cada pareja de los números 24, 42 y *m* tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y *m* tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es *m*?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

21 Nivel II — CP XII

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

$$\begin{array}{r} P\ Q\ R\ S \\ \times\ 9 \\ \hline S\ R\ Q\ P \end{array}$$

A) P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7

D) S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

22 Nivel II — CP XIII

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

A) 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

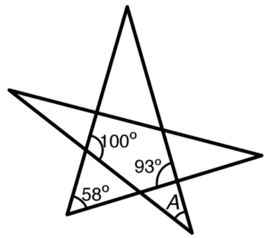
23 Nivel II — CP XIII

Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?}\cdot 6^{?}\cdot 9^{?}\cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

24 Nivel II CP XIV

Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo *A*?



A) 35º **B)** 42º **C)** 51º

D) 65º **E)** 109º

25 Nivel II CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

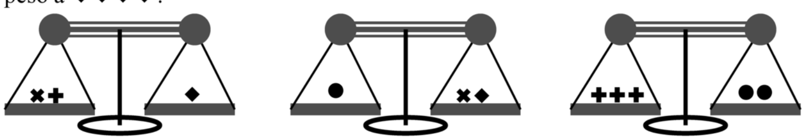
26 Nivel II CP XIV

En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

A) 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

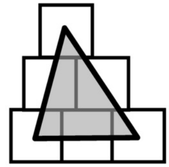
27 Nivel II CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

28 Nivel II — CP XV



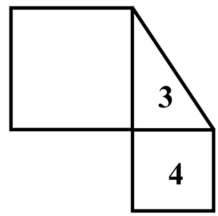
Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

UNA: Vaqueros y corbata **DOS:** Vaqueros sin corbata
TRES: Sin vaqueros y con corbata **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

A) La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
D) La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

29 Nivel II — CP XVI

En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?



A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6
E) 5

30 Nivel II — CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

31 Nivel II — CP XVII

Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

A) 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

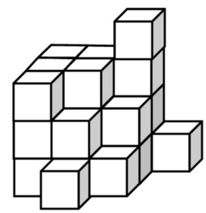
32 Nivel II CP XVII

Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área de un cuadrado?

A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

33 Nivel II CP XVII

Sara había construido un gran cubo de $4 \times 4 \times 4$ con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



A) 28 **B)** 38 **C)** 26
D) 40 **E)** 37

34 Nivel II CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

A) 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

35 Nivel II CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

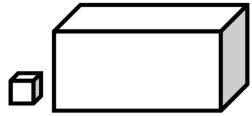
A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

36 Nivel II CP XIX

¿Qué me pongo?, *¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

37 Nivel II CP XIX



Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

A) 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

38 Nivel II CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

A) 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

39 Nivel II CP XX

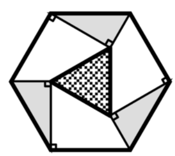
Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta.

+			
	8	12	
	10		
	13		

¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

A) 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

40 Nivel II CP XX



Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo central?

A) 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24

41 Nivel II CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

42 Nivel II CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

A) 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

43 Nivel II CP XXII

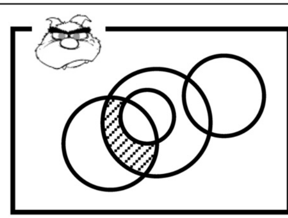
¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:

Mi número favorito es el 5 *y por eso he pensado en el número* A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

A) 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

44 Nivel II CP XXII

Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



A) 5 **B)** 4 **C)** 3

D) 2 **E)** 1

45 Nivel II — CP XXIII

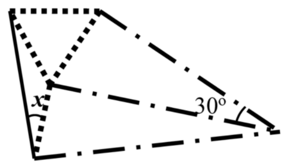
Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

A) $\dfrac{896\,678}{338\,444}=\dfrac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\dfrac{179\,972}{417\,946}=\dfrac{2\,856}{6\,664}$

D) $\dfrac{69\,796}{192\,994}=\dfrac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{1\,428}{3\,332}$

46 Nivel II — CP XXIII

En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?

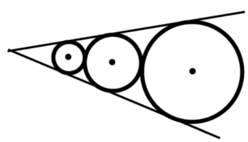


A) 18º **B)** 26º **C)** 15º

D) 24º **E)** 20º

47 Nivel II — CP XXIII

En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?

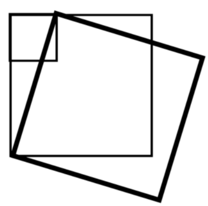


A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

48 Nivel II — CP XXIV

Si el cuadrado menor tiene área A y el cuadrado mediano tiene área B, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?



A) $(A+B)^2$ **B)** A^2+B^2 **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

D) $A+2B$ **E)** $A+B$

49 Nivel II CP XXIV

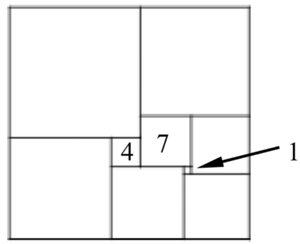
Si a, b, c, d, e, son enteros positivos y $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

A) $a + 2c = b$ **B)** $a + b + c + d = e$ **C)** $a + c = b + d$

D) $a \cdot c = b \cdot d$ **E)** $b = d - e$

50 Nivel II CP XXV

Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m^2, tiene la sala?



A) 1024 **B)** 1122 **C)** 1023

D) 1088 **E)** 1056

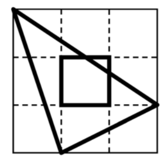
Enunciados - Nivel III

1 Nivel III CP I

Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

2 Nivel III CP I



Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

D) $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$

3 Nivel III CP III

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

4 Nivel III CP III

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

5 Nivel III CP IV

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14 789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

6 Nivel III CP IV

Si $n = 1 + 3 + 5 + ... + 999$ y $m = 2 + 4 + 6 + ... + 1000$, $m - n$ es igual a:

A) 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

7 Nivel III CP V

Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 a pq. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p + q$.

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

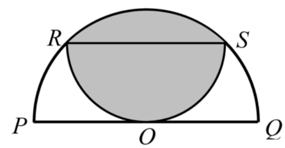
8 Nivel III CP V

El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

A) 1001^2 **B)** 2002^2 **C)** $2002 \cdot 1001$ **D)** $1001 \cdot 2001$ **E)** Nada de lo anterior

9 Nivel III CP V

En la figura adjunta, las curvas *PRSQ* y *ROS* son semicircunferencias y *RS* es paralela a *PQ*. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en m^2, de la región sombreada?

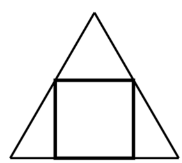


A) $\frac{\pi - 1}{2}$ **B)** $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{4}$

D) 1 **E)** $\frac{\pi}{2} - 1$

10 Nivel III CP V

Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



A) 2 **B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

11 Nivel III CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

12 Nivel III CP VI

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

v	24	w
18	x	y
25	z	21

A) 43 **B)** 44 **C)** 45
D) 46 **E)** 47

13 Nivel III CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

14 Nivel III CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

A) 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

15 Nivel III CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

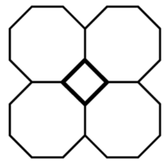
A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

16 Nivel III CP VIII

El número de dos cifras [*ab*] es divisible por 7. Representamos por [*ba*] el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: $[ba] + a$, ¿cuáles son también divisibles por 7?

A) Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III
D) Los tres **E)** Solamente I y III

17 Nivel III CP IX



Rodeamos un polígono regular de m lados por m polígonos regulares de n lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale n si $m = 10$?

A) 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 20 **E)** 26

18 Nivel III CP IX

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

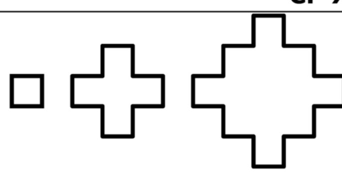
19 Nivel III CP X

En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

20 Nivel III CP X

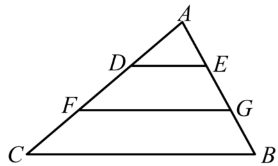
En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm^2 de área?



A) 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm
D) 40 cm **E)** 44 cm

21 Nivel III CP X

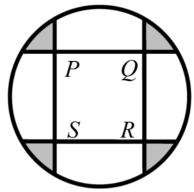
En el triángulo ABC de la figura, de área 90 cm², los puntos E y G dividen al lado AB en tres partes iguales y las rectas DE y FG son paralelas a BC. ¿Cuál es, en cm², el área del trapecio $DEGF$?



A) 20 **B)** 25 **C)** 30
D) 36 **E)** 45

22 Nivel III CP XI

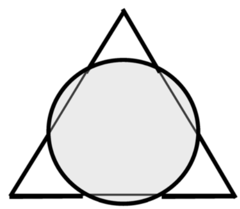
El cuadrado $PQRS$ de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m², el área de la región sombreada?



A) $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$
D) $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

23 Nivel III CP XI

Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?



A) 2π **B)** $6+\pi$ **C)** 9
D) 3π **E)** $9+2\pi$

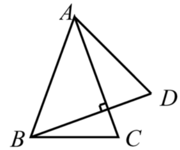
24 Nivel III CP XII

Con 10! (diez factorial) representamos al producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

A) 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

25 Nivel III CP XII

Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$. Si BD es perpendicular a AC, la suma de los ángulos $\hat{C}+\hat{D}$ es igual a:

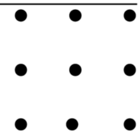


A) 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

E) No tenemos datos suficientes para determinarla

26 Nivel III CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



A) $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$ **D)** $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$

27 Nivel III CP XIII

Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

28 Nivel III CP XIV

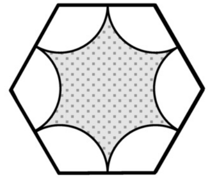
En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x?
[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]

				21
	16			
		27		
				x

A) 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

29 Nivel III — CP XIV

Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en dm^2, el área de la estrella central?



A) $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $6\sqrt{3}-2\pi$ **C)** $2\sqrt{6}-\pi$

D) $3(\sqrt{18}-\pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3}-\pi)$

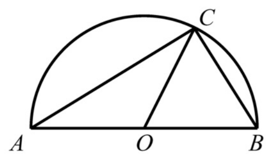
30 Nivel III — CP XV

Si n es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que n?

A) $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** n^2+1 **D)** n^2+n **E)** n^2+2n+1

31 Nivel III — CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro O y radio 1 cm. Si C es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.
B) El triángulo AOC es isósceles.
C) El área del triángulo ABC es menor o igual que 1 cm^2.
D) El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC.
E) $AO^2+OB^2=AC^2+BC^2$.

32 Nivel III — CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

A) Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
D) Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

33 Nivel III CP XVI

El resto de dividir 7^{25}entre 9 es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

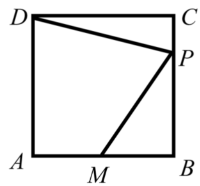
34 Nivel III CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

35 Nivel III CP XVII

En el cuadrado *ABCD* de lado 2 cm, *M* es el punto medio del lado *AB* y *P* es un punto variable del lado *BC*. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de *DP* + *PM*?

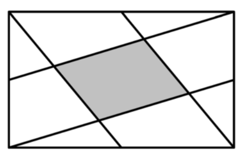


A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

D) $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

36 Nivel III CP XVIII

En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm^2, la del romboide, en cm^2, es:



A) 25 **B)** 20 **C)** 15

D) 12 **E)** 10

37 Nivel III CP XVIII

¿Cuántos enteros n, con $1 \le n \le 100$, verifican que n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

38 Nivel III CP XVIII

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

A) –1007 **B)** –1005 **C)** –670 **D)** 0 **E)** 1008

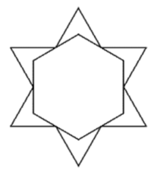
39 Nivel III CP XIX

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

40 Nivel III CP XIX

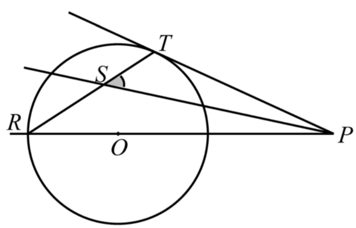
El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm^2. El área, en cm^2, de la estrella es:



A) 15 **B)** 18 **C)** 20
D) 21 **E)** 24

41 Nivel III CP XX

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro O y otra tangente en T, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento RT en S. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$?



A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º
D) 45º **E)** 52,5º

42 Nivel III CP XX

Si los cuatro enteros C, D, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

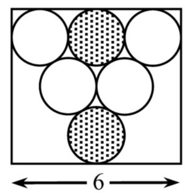
A) Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5
D) Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

43 Nivel III CP XXI

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras *PQRST*. Si el número de tres cifras *PQR* es divisible por 4, el *QRS* es divisible por 5 y el *RST* es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra *P*?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

44 Nivel III CP XXI



En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?

A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

45 Nivel III CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

A) 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

46 Nivel III CP XXII

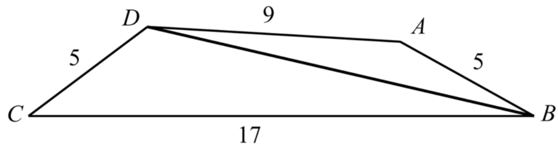
Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

A) 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

47 Nivel III CP XXIII

En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, ¿cuánto mide *BD* si sabemos que es un entero?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



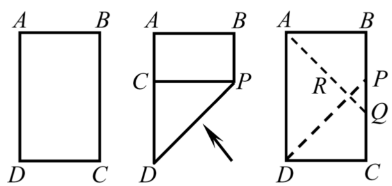
48 Nivel III CP XXIII

Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

49 Nivel III CP XXIV

Una hoja rectangular *ABCD* con *AB* = 5 cm y *AD* = 8 cm, se dobla para que el borde *CD* caiga sobre el borde *AD*, formándose así el doblez *PD*. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que *AB* caiga sobre *AD*, formándose ahora el doblez *AQ*. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto *R*, calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero *DRQC*.



A) 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

50 Nivel III CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

Enunciados - Nivel IV

1 Nivel IV **CP I**

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

$\boxed{P}$ $\boxed{Q}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: "Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

2 Nivel IV **CP I**

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido 1 + 2 + 3 +......+ 50 = 1275 tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

A) 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

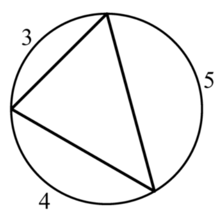
3 Nivel IV **CP II**

Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

A) 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

4 Nivel IV **CP II**

Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?



A) 6 **B)** $\frac{18}{\pi^2}$ **C)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

5 Nivel IV CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

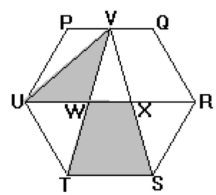
6 Nivel IV CP III

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

A) 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

7 Nivel IV CP IV

En el hexágono regular *PQRSTU* de la figura, *V* es el punto medio de *PQ*, y *W* y *X* son los puntos que se señalan. ¿Cuánto vale $\frac{\text{Área } WXST}{\text{Área } UVW}$?



A) 2 **B)** 3 **C)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

8 Nivel IV CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3, ...$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los $n - 1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de a_2?

A) 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

9 Nivel IV CP V

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

10 Nivel IV CP V

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, sen x es igual a:

A) $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

11 Nivel IV CP VI

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto P. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto P. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$

12 Nivel IV CP VI

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y P_2 la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

A) 0 **B)** $\dfrac{1}{2002}$ **C)** $\dfrac{1}{2001}$ **D)** $\dfrac{2}{2001}$ **E)** $\dfrac{1}{1000}$

13 Nivel IV CP VII

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.
1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

14 Nivel IV CP VII

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

15 Nivel IV CP VIII

El menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

16 Nivel IV CP VIII

Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

17 Nivel IV CP IX

Si x e y son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

18 Nivel IV CP IX

Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y T el conjunto de los puntos (x, y) tales que $f(x) + f(y) \le 0$ y $f(x) - f(y) \le 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto T, es:

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

19 Nivel IV **CP X**

La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?

A) 7 **B)** 7^2 **C)** 7^3 **D)** 7^4 **E)** 7^5

20 Nivel IV **CP X**

Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra".* ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

21 Nivel IV **CP XI**

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

22 Nivel IV **CP XI**

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

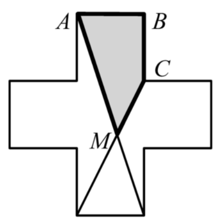
A) 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

23 Nivel IV **CP XII**

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

24 Nivel IV **CP XII**



Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM*?

A) $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

D) 20 **E)** $\frac{62}{3}$

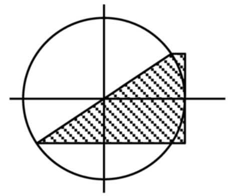
25 Nivel IV CP XIII

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado c, si c es media geométrica de las diagonales?

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

26 Nivel IV CP XIII

La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es α, el área de dicho trapecio es:



A) $2 \text{ sen } \alpha$ **B)** $2 \text{ sen}^2 \alpha$ **C)** $2 \text{ tg } \alpha$

D) $2\text{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** $\text{sen } 2\alpha$

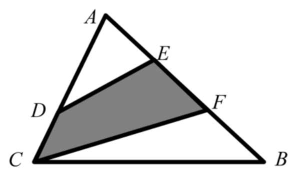
27 Nivel IV CP XIV

Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

A) $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3 + 3\,i$ **D)** $2 + 2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

28 Nivel IV CP XIV

En la figura que te mostramos, el área del triángulo ABC es 9, DC es un tercio de AC y los puntos E y F dividen a AB en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 3 **B)** 4 **C)** 4,5

D) 5 **E)** 6

29 Nivel IV CP XV

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

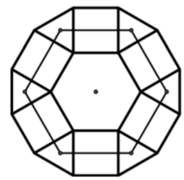
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

30 Nivel IV CP XV

Si $f(11) = 11$ y $f(n+3) = \dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

A) 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

31 Nivel IV CP XVI

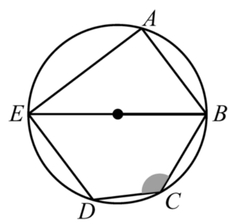


Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

A) $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

D) 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

32 Nivel IV CP XVI



En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\dfrac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

A) 120º **B)** 125º **C)** 130º

D) 135º **E)** 140º

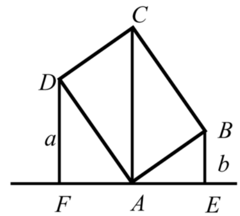
33 Nivel IV CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10 \cdot \cos x$?

A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

34 Nivel IV CP XVII

En la figura que observas, $ABCD$ es un rectángulo y los segmentos DF, BE y CA son perpendiculares a la recta FE. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud FE es:



A) $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

D) $\dfrac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

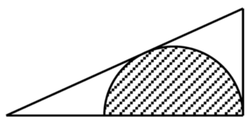
35 Nivel IV CP XVIII

La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los n primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

36 Nivel IV CP XVIII

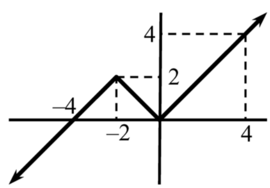
Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?



A) $\dfrac{7}{3}$ **B)** $\dfrac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\dfrac{13}{3}$ **E)** $\dfrac{17}{3}$

37 Nivel IV CP XIX

Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f\left[f\left(f(x)\right)\right] = 0$?

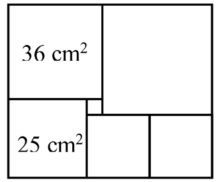


A) 4 **B)** 3 **C)** 2

D) 1 **E)** 0

38 Nivel IV CP XIX

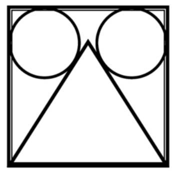
Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?



A) 50 **B)** 44 **C)** 46
D) 52 **E)** 48

39 Nivel IV CP XX

La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

40 Nivel IV CP XX

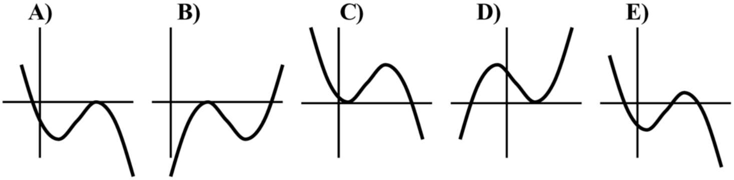
Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

A) 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

41 Nivel IV CP XXI

Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**

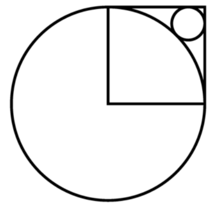


42 Nivel IV CP XXI

¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

43 Nivel IV CP XXII



La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:

A) 30 **B)** 40 **C)** 50

D) 60 **E)** 70

44 Nivel IV CP XXII

Dos semirrectas que parten de un punto O forman un ángulo de 30º. Los puntos A y B están uno en cada una y $AB = 1$. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento OB?

A) 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

45 Nivel IV CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

46 Nivel IV CP XXIII

Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

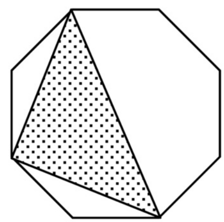
D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

47 Nivel IV CP XXIV

Sea una función f tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$, para cualesquiera enteros a y b.
Si $f(1) = 3$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ es:

A) 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

48 Nivel IV CP XXIV



En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?

A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

49 Nivel IV CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

A) 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

50 Nivel IV CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

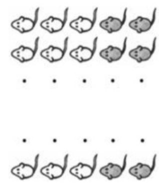
Soluciones - Nivel I

1 Nivel I CP I

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

A) 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

(C) Por cada 5 ratones, *Mu* caza 3 y *Mi* 2. Si organizamos los ratones en un esquema como el de la figura, donde los ratones blancos son los cazados por *Mu* y los grises los cazados por *Mi*, vemos claramente que tendremos $\frac{60}{5}=12$ grupos de 5 ratones.



Así pues, *Mi* cazó $12\times 2=24$ ratones.

2 Nivel I CP I

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.
– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

A) Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana

E) No hay información suficiente

(D) Si comenzamos con una tabla como la de abajo es muy sencillo resolver el problema.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
		Beatriz	

Sabemos que Beatriz está sentada en la silla 3, por lo que Carlos no está ni en la 2 ni en la 4 ya que Beatriz **no** está al lado de Carlos, así que estará en la 1.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Carlos		Beatriz	

Por otra parte, Antonio **no** está entre Beatriz y Carlos y, en consecuencia estará en la 4, quedando la 2 para Diana.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Carlos	Diana	Beatriz	Antonio

3 Nivel I CP II

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

A) 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

(C) Como nos dicen que hasta 50 hay 15 primos, solo nos falta estudiar los números del 51 al 59.
Los pares: 52, 54, 56 y 58 son múltiplos de 2.
Los múltiplos de 3 son el 51 ($5 + 1 = 6$) y el 57 ($5 + 7 = 12$).
El 55 es múltiplo de 5, porque termina en 5.
Solo quedan el 53 y el 59. Solo tenemos que estudiar si son divisibles entre los primos menores o iguales que 7 (2, 3, 5, 7). ¡Piensa por qué!
53 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
59 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
Por lo tanto, entre 50 y 60 hay dos primos. Así pues, hay 17 primos menores que 60.

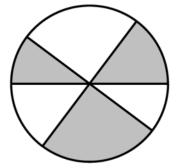
4 Nivel I CP II

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

A) 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

(D) Si saco tres calcetines es posible que haya uno de cada color, pero si saco cuatro, aunque los tres primeros sean de distinto color, el cuarto, dado que solo hay tres colores, es seguro que será de uno de esos colores. Por lo tanto, la respuesta es cuatro calcetines.
Notemos que el punto esencial es que tenemos tres y solo tres colores, importando poco el número de calcetines con tal de tener cuatro o más.

5 Nivel I CP III



Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:

A) 6π **B)** 12π **C)** 18π

D) 24π **E)** 36π

(C) Cada sector circular sombreado se corresponde con su sector blanco simétrico con respecto al centro del círculo. Así, el área de la región sombreada es la mitad del área del círculo, $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$. Luego el área pedida es 18π .

6 Nivel I CP IV

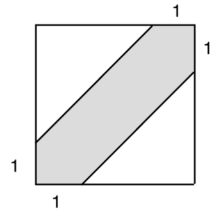
Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

A) 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

(A) Si en cada viaje se transportan 8 mg de néctar, en 500 000 viajes se transportarán 500 000 × 8 = 4 000 000 mg de néctar y, con ellos, las abejas, fabricarán un kilo de miel. Ahora solo falta saber cuántos kilos son 4 000 000 mg. Dado que 1000 mg son un gramo, 4 000 000 mg = 4 000 000 : 1000 = 4000 g y como 1000 g son un kilo, 4000 g = 4 kg.
Así que, para obtener un kilo de miel, son necesarios 4 kilos de néctar.

7 Nivel I CP IV

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?



A) 6 m^2 **B)** 7 m^2 **C)** 7,5 m^2

D) 8 m^2 **E)** 8,5 m^2

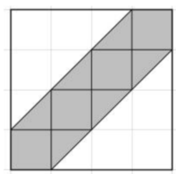
PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Observa que los dos triángulos blancos forman un cuadrado de lado 3, por lo que lo más cómodo es obtener el área del cuadrado, 16 m^2, y restarle el área del cuadrado blanco, 9 m^2.

El área de la zona sombreada es $16 - 9 = 7$ m^2.

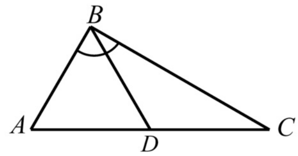
SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Muchos problemas de este tipo se resuelven fácilmente dividiendo la figura en partes de igual área. En nuestro caso dividiremos el cuadrado en 16 cuadraditos de 1 m^2. Observamos que la franja sombreada se secciona en 4 cuadraditos más 6 medios cuadraditos. Por lo que su área es igual a la de $4 + 3 = 7$ cuadraditos, esto es, 7 m^2.



8 Nivel I CP V

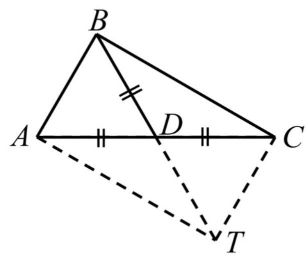
En el triángulo de la figura, los segmentos AD, BD y DC son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en B).



A) 75º **B)** 86º **C)** 90º
D) 92º **E)** Falta información

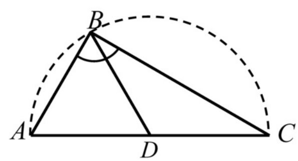
PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Si dibujamos el triángulo ACT, igual al dado, resulta un paralelogramo $ABCD$ en el que sus diagonales $AC = 2AD$, ya que $AD = DC$, y $BT = 2BD$ ya que $BD = DT$ son iguales pues $AD = BD$. Así pues, dicho paralelogramo es un rectángulo y el ángulo pedido es de 90º.



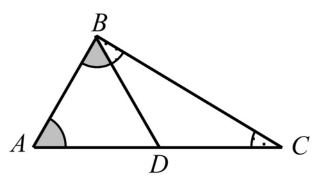
SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Si nos fijamos bien, vemos que los segmentos iguales AD, BD y DC, pueden ser radios de una circunferencia de centro D, como se muestra en la figura. Queda claro que el ángulo $A\hat{B}C$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, con ángulo central de 180º. En consecuencia, el ángulo $A\hat{B}C$ mide $\dfrac{180º}{2} = 90º$.



TERCERA SOLUCIÓN

(C) Si nos fijamos en el triángulo ADB, como $AD = BD$, deducimos que los ángulos marcados en gris son iguales.
De la misma forma, mirando el triángulo BDC, como $BD = DC$, los ángulos punteados son iguales. La suma de los ángulos del triángulo ACB está formada por dos ángulos grises y dos punteados, luego un ángulo gris y uno punteado suman 180º : 2 = 90º.



9 Nivel I CP V

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

(A) 10 gatos en 20 días comerán la mitad de ratones que 20 gatos, o sea, comerán 10, por lo que en 10 días comerán la mitad de 10, es decir, 5 ratones.

10 Nivel I CP VI

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

A) 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

(B) Una escala es la razón entre la medida del plano y la medida en el mundo real. Para el plano a escala 1:20 significa que un centímetro del plano representa 20 centímetros en la realidad, de donde se deduce que para una medida en el plano de 20 cm son $20 \times 20 = 400$ cm de la realidad.
Ahora veamos cómo representar 400 cm de la realidad en un plano 1:50. Como la escala 1:50 significa que 50 cm de la realidad los vamos a representar con 1 cm, 400 cm de la realidad los representaremos con $400 : 50 = 8$ cm.

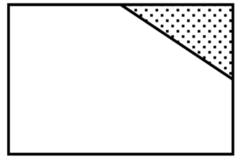
11 Nivel I CP VI

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

A) 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

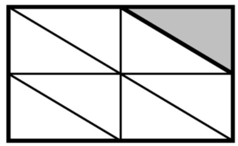
(B) Si cada hora atrasa 20 segundos, en 3 horas atrasará un minuto y para acumular 30 minutos necesitará $3 \times 30 = 90$ horas, es decir, 3 días y 18 horas.

12 Nivel I CP VII



El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?

A) $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$



(E) Una división de la figura, en partes más pequeñas de igual área, facilita enormemente la solución de problemas de este tipo.
Aunque no se sabe la medida de los lados del triángulo, puede determinarse su área teniendo en cuenta la partición de la figura, en la que se observa que el triángulo es la octava parte del rectángulo.

13 Nivel I CP VII

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

A) Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario
D) Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

PRIMERA SOLUCIÓN

(E) Dado que cada uno tiene un animal y solo uno, es sencillo ir directamente a por la solución, que seguro que será D o E pues ambas no pueden ser ciertas.
Como Benito tiene un animal con pelo y no le gustan los gatos, Benito tiene un perro y, por tanto, Diana no puede tener un perro. En consecuencia, la frase falsa es “Diana tiene un perro”.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(E) También podemos deducir qué animal tiene cada uno y así buscar la frase falsa.
Benito tiene un animal con pelo (perro o gato) y no le gustan los gatos, así que tiene un perro. Diana tiene un animal con cuatro patas (perro o gato), pero como Benito tiene un perro, Diana tiene un gato. Carolina tiene un canario y, por tanto, Alba tiene un pez.

14 Nivel I CP VIII

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

A) 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

(C) Sabemos que $1 + 2 + \ldots + 19 + 20 = 210$. En consecuencia, para sumar los primeros cuarenta enteros positivos debemos sumar a 210 los restantes enteros hasta 40.

Para ellos vamos a escribir esos 20 números que nos faltan por sumar de una manera ingeniosa y volveremos a usar que la suma de los 20 primeros es 210:

$21 = 20 + 1$
$22 = 20 + 2$
$23 = 20 + 3$
$\ldots$
$39 = 20 + 19$
$40 = 20 + 20$

Ahora sumamos así:

$21 + 22 + 23 + \ldots + 39 + 40 = 20 \times 20 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20) = 400 + 210 = 610.$

A este resultado le sumamos la suma de los 20 primeros números y obtenemos: $210 + 610 = 820$.

15 Nivel I CP VIII

Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

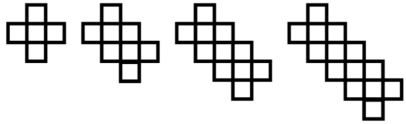
(B) El punto clave es tener presente algo tan básico como esto: *toda bola es de cierto color o no es de ese color.* En nuestro problema esto nos lleva a que si 17 no son verdes, las otras 3 son necesariamente verdes y a que si 12 no son amarillas, las otras 8 son amarillas. Como además hay 5 rojas, tenemos: 3 (verdes) + 8 (amarillas) + 5 (rojas) = 16 bolas (no azules). Por tanto, el resto de las bolas son azules: 20 – 16 = 4 bolas azules.

16 Nivel I CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?

A) 50 **B)** 38 **C)** 32

D) 30 **E)** 29



PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Basta continuar con la sucesión que se obtiene con el número de cuadraditos de cada tablero. Es fácil observar que este número de cuadraditos va aumentando de 3 en 3 y, como el tablero que ocupa el primer lugar tiene 5 cuadraditos, es inmediato formar la siguiente tabla:

Lugar	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Nº de cuadraditos	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

El décimo tablero tendría 32 cuadraditos.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Si no queremos formar toda la sucesión de números hasta llegar al deseado, podemos razonar así:

Para llegar al término 10º de la sucesión, tenemos que sumar a 5, 9 veces 3 cuadraditos, por lo tanto, el décimo sería: $5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$.

Y además hemos resuelto el problema general.

El tablero que ocupa el lugar n tiene $C_n = 5 + (n - 1) \times 3$ cuadraditos.

17 Nivel I CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

A) domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

(B) Los años no bisiestos tienen 365 días, es decir, 52 semanas y un día ($365 = 52 \times 7 + 1$). Por tanto si estamos en un año no bisiesto y hoy fuera lunes, el próximo año, tal día como hoy sería martes. En los años bisiestos ($366 = 52 \times 7 + 2$) habría que avanzar dos días.

Entre 2005 y 2025 hay 20 años, de los cuales son bisiestos: 2008, 2012, 2016, 2020 y 2024. Es decir, hay 15 años no bisiestos y 5 bisiestos. Por tanto, el 1 de septiembre (jueves) se desplazará $15 + 5 \times 2 = 25$ días de la semana, o sea, 3 semanas y 4 días, esto es, pasará de ser jueves a ser lunes.

18 Nivel I CP X

En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?

	✋	☾	★
+	✋	☾	★
☺	★	☼	❀

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

(D) Como ✋ = 7 y 7 + 7 = 14, entonces ★ puede ser 4 o 5 (si me llevara una), pero como nos dicen que es par, tenemos que ★ = 4, ☺ = 1 y ❀ = 8.

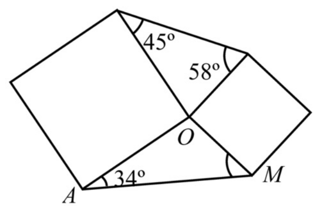
La luna ☾ tiene que ser menor que 5 porque si no, al hacer ☾ + ☾, me llevaría una y ★ sería impar. Probemos con cada caso. Si ☾ = 0 entonces ☼ también sería 0, pero cada letra debe ser un dígito diferente. ☾ = 1 no puede ser pues ☺ = 1. ☾ = 2 tampoco, pues sería ☼ = 4, pero ★= 4, por esa misma razón no puede ser ☾ = 4. Así que sólo nos queda ☾ = 3. Si ☾ = 3 entonces ☼ = 6 que sí es posible. Conclusión: ☾ = 3.

	7	**3**	**4**
+	**7**	**3**	**4**
1	**4**	**6**	**8**

19 Nivel I CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:

A) 43º **B)** 39º **C)** 38º
D) 36º **E)** 35º

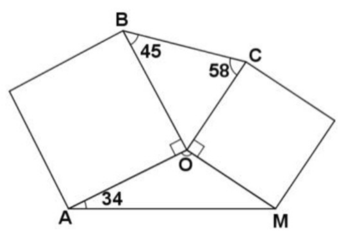


(A) Si supiéramos la medida del ángulo $A\hat{O}M$ el problema estaría resuelto. Para ello calculamos primero el ángulo $B\hat{O}C = 180 - (45 + 58) = 77^{o}$.

Con este resultado es inmediato calcular el ángulo $A\hat{O}M$:

$A\hat{O}M = 360 - (90 + 90 + 77) = 103^{o}$.

Y finalmente: $A\hat{M}O = 180 - (34 + 103) = 43^{o}$.



20 Nivel I CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

A) 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

(B) Al pulsar la tecla A, el valor del número aumenta multiplicándose por 3 y al pulsar B disminuye en una unidad. Está claro que pulsando A sólo conseguimos múltiplos de 3. Pero como 53 no es múltiplo de 3, necesariamente tendremos que pasar por el 54 antes de alcanzar nuestro objetivo. Como $54 = 2 \times 3^3$, es posible obtener este número, a partir del 2, pulsando AAA, que es el mínimo número de pulsaciones para ir del 2 al 54. Solo falta obtener el 2 y el 53. El 2 se obtiene, a partir del 1 inicial, pulsando AB y el 53 se logra restando 1 al 54 mediante una pulsación de la tecla B. En ambos casos es obvio que hemos obtenido los números con las mínimas pulsaciones posibles. Conclusión: ABAAAB es la secuencia que lleva del 1 al 53 con el mínimo número de pulsaciones. No obstante, podría pensarse que es posible alcanzar el 54 por algún otro camino, sin pasar por el 2. Pero es inmediato comprobar que cualquier alteración en ese sentido conlleva un aumento del número de pulsaciones.

También podemos ver que ninguna de las $2^4 = 16$ opciones que se obtiene pulsando 4 teclas (AAAA, AAAB, AABA, …) nos llevará al 53. Por tanto, la solución es 6.

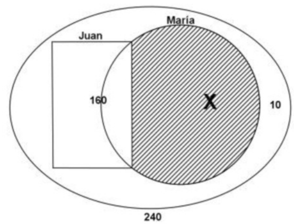
21 Nivel I CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

A) 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

PRIMERA SOLUCIÓN

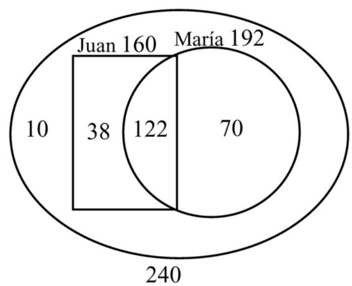
(E) Para resolver este tipo de problemas suele ser muy útil ayudarse de diagramas como el de la figura, donde cada región plana representa un conjunto determinado de objetos.



En nuestro caso:
La elipse representa la colección de 240 cromos.
El rectángulo representa los 160 cromos de Juan.
El círculo, los cromos de María.
La superficie de la elipse no ocupada por el rectángulo y el círculo, los 10 cromos que les faltan a Juan y María para completar la colección.
Y, finalmente, la zona rayada representa los X cromos de María que no tiene Juan.
De la figura se deduce inmediatamente que: $X = 240 - (160 + 10) = 70$ cromos.
Conviene resaltar que no hemos necesitado conocer el número de cromos que tiene María.

SEGUNDA SOLUCIÓN

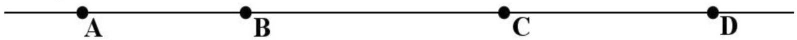
(E) Entre María y Juan tienen 352 cromos.



La colección consta de 240 cromos, pero a María y a Juan les faltan 10 cromos para terminarla, lo que quiere decir que cada uno tiene 122 cromos repetidos:
$(192 + 160) - (240 - 10) = 352 - 230 = 122$.
Conociendo el número de cromos repetidos se rellena fácilmente el diagrama y podemos contestar: María tiene 70 cromos que no tiene Juan.

22 Nivel I CP XII

Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:



La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

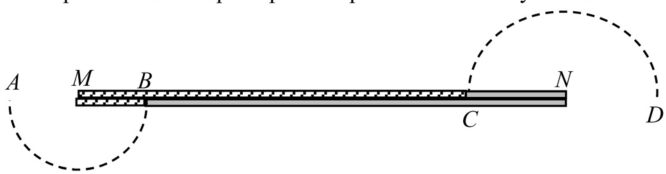
A) 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)**

PRIMERA SOLUCIÓN

(A) A veces, para resolver un problema matemático, puede ser interesante pensar en algún artilugio mecánico que se adapte a él. Imaginemos los segmentos *AB* y *CD* como dos regletas articuladas en los puntos medios, *M* y *N,* de los segmentos *AB* y *CD*, según se muestra en la figura.

Hagamos ahora girar 180º las secciones de regleta *AM* y *ND* alrededor de los puntos *M* y *N*, como se muestra en la figura de abajo.

Dado que la longitud total de las regletas es 18 + 12 = 30 m, y esta no ha variado, es obvio que la distancia que separa los puntos medios *M* y *N* es 30 : 2 = 15 m.



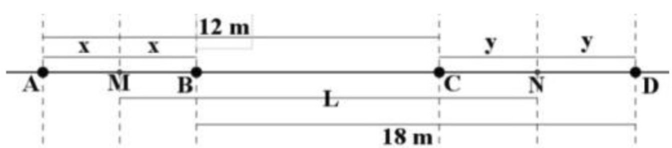
SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Y, por supuesto, podemos resolver el problema de forma algebraica.

Basta observar atentamente la figura para plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} L = 12 - x + y \\ L = 18 - y + x \end{cases}$$

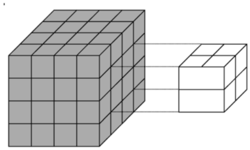
Sumando miembro a miembro tenemos que $2L = 12 + 18$ y, por tanto, $L = 15$ m.



23 Nivel I CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

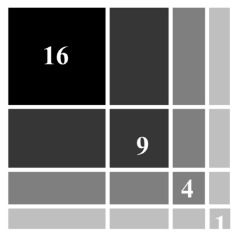
A) 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno



(C) Con 64 cubitos se forma un cubo de cuatro cubitos de lado. Si quitamos la *cáscara* pintada de rojo queda un cubo central de dos cubitos de lado, como muestra la figura.
Conclusión: solo quedan ocho cubitos completamente blancos.

24 Nivel I CP XIII

El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 cm², ¿cuál es, en cm², el área del cuadrado total?

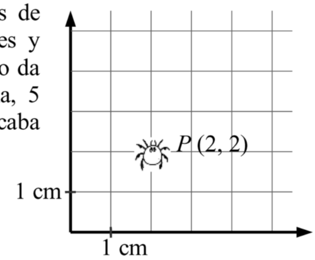


A) 100 **B)** 75 **C)** 64
D) 36 **E)** 25

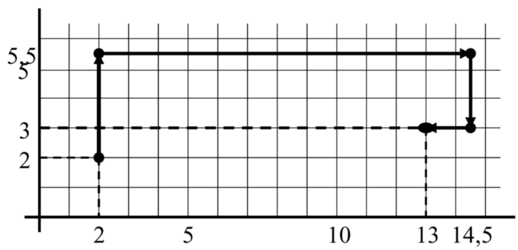
(A) Nuestro logo no ofrece dificultad. Los lados de cada uno de los cuadrados miden respectivamente: $\sqrt{16} = 4$ cm, $\sqrt{9} = 3$ cm, $\sqrt{4} = 2$ cm, $\sqrt{1} = 1$ cm.
Por lo tanto, el lado del cuadrado total mide $4+3+2+1=10$ cm y su área será $10^2 = 100$ cm².

25 Nivel I CP XIII

Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?



A) $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$
D) $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$



PRIMERA SOLUCIÓN

(A) Si no manejamos bien las coordenadas cartesianas podemos abordar el problema siguiendo uno a uno los pasos descritos en el enunciado.

[1º] 7 saltos hacia arriba: como cada salto es de 0,5 cm, recorrerá $7 \times 0{,}5 = 3{,}5$ cm. Lo representaremos por la primera flecha (vector) vertical y hacia arriba, de 3,5 cm de longitud.

[2º] 25 saltos hacia la derecha: lo representamos por el segundo vector (hacia la derecha) de longitud $25 \times 0{,}5 = 12{,}5$ cm.

[3º] 5 saltos hacia abajo: lo representamos por el siguiente vector (hacia abajo) de longitud $5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ cm.

[4º] 3 saltos hacia la izquierda: lo representamos por el siguiente vector (hacia la izquierda) de $3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ cm de longitud.

Finalmente queda a una distancia del eje vertical, de 13 cm y, a una distancia del eje horizontal de 3 cm. Decimos entonces que está en el punto $A(13, 3)$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Si sabemos trabajar con las coordenadas el problema se resuelve más rápido.

En la dirección horizontal, el bichito, da 25 saltos hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, de modo que se ha movido $25 - 3 = 22$ saltos hacia la derecha. De la misma forma, en sentido vertical se ha movido $7 - 5 = 2$ saltos hacia arriba.

Como cada salto es de 0,5 cm la posición final será:

Eje horizontal: $2 + 22 \times 0{,}5 = 13$. Eje vertical: $2 + 2 \times 0{,}5 = 3$.

Por lo tanto acaba en el punto $A(13, 3)$.

26 Nivel I CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

A) Una **B)** Dos **C)** Tres
D) Cuatro **E)** Cinco

(B) En este caso es conveniente empezar por considerar fracciones numéricas, olvidando de momento, las bolas que representan. Debemos centrarnos en obtener 2/5 a partir de números mayores que 2 y 5. Es inmediato ver que la fracción, con números más pequeños, que se simplifica a 2/5 es 4/10, lo que significa que para que la probabilidad de sacar una bola blanca sea 2/5, el saco debe contener cuatro bolas blancas y seis grises como mínimo.
Dado que inicialmente había cuatro bolas grises, Merche tiene que añadir dos bolas grises como mínimo.

27 Nivel I CP XIV

En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra x?

x		15
	15	3
12		24

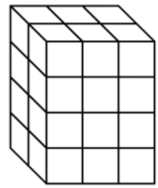
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

(D) Como x pertenece a la vez a una columna y una diagonal, la suma de los dos elementos restantes, tanto de la columna como de la diagonal, deberá sumar lo mismo. En nuestro caso tendremos $z + 12 = 15 + 24$, es decir, $z = 27$, y ya con la segunda fila completa podemos calcular la suma común (que llamaremos M):
$M = 27 + 15 + 3 = 45$, de donde $x = 45 - 15 - 24 = 6$.

x		15
z	15	3
12		24

Observa que en todo cuadrado mágico la constante mágica M, es decir, el valor de la suma de los números de cada fila, columna y diagonal es siempre igual al triple del valor de la casilla central. Esto es así porque si sumamos las dos diagonales más la fila y la columna centrales tendremos $4M$, pero como hemos sumado todos los números del cuadrado una vez, excepto el número de la casilla central (en nuestro caso, 15) que lo hemos sumado 4 veces y la suma de los 9 números es $3M$, tenemos que $4M - 3\cdot 15 = 3M$, luego $M = 45$. Sabiendo esto, era fácil resolver el problema y, en realidad, nos hubieran sobrado datos.

28 Nivel I CP XV



Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

(B) Si el perímetro de la base mide 18 cm, la suma de los dos lados de la base (largo + ancho) será 18 × 2 = 9 cm.

Por otra parte, sabemos que 42 = largo × ancho × alto. Y, además, descomponiendo 42 en factores primos tenemos que 42 = 7 × 2 × 3. Lo que obliga a que los lados de la base sean 7 y 2, debido a que su suma es 9.

Por tanto, la altura necesariamente mide 3 cm.

29 Nivel I CP XV

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

A) 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

(B) Para empezar construimos una tabla con los datos del enunciado; ponemos SÍ cuando ambos hablan un idioma común y NO en caso contrario.

	A	B	C	D	E	F
A		SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO
B	SÍ		SÍ	SÍ	NO	SÍ
C	SÍ	SÍ		NO	SÍ	SÍ
D	SÍ	SÍ	NO		SÍ	SÍ
E	SÍ	NO	SÍ	SÍ		SÍ
F	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	

Si elegimos uno cualquiera de los ejecutivos vemos que solo puede estar con otros cuatro posibles. Tomemos, por ejemplo, el A. En este caso puede estar con B, C, D y E. Supongamos que está con B. Entonces quedan por agrupar los cuatro restantes: C, D, E y F que en principio se pueden agrupar, por parejas, de tres formas distintas.

	A	B	C	D	E	F
A		SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO
B	SÍ		SÍ	SÍ	NO	SÍ
C	SÍ	SÍ		NO	SÍ	SÍ
D	SÍ	SÍ	NO		SÍ	SÍ
E	SÍ	NO	SÍ	SÍ		SÍ
F	NO	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	

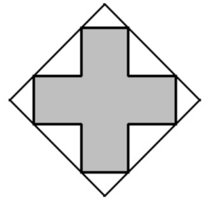
La segunda tabla muestra claramente que una y solo una de las parejas no puede agruparse, lo que invalida una de esas tres formas. Con lo que para la agrupación (A, B) tenemos dos formas de agrupar los cuatro restantes, y lo mismo puede decirse de las otras tres posibles agrupaciones de A: (A, C), (A, D) y (A, E). En consecuencia, para cada una de las cuatro formas de agrupar A tendremos dos formas de agrupar los cuatro restantes. En total $4 \times 2 = 8$ formas.

Con ayuda de las tablas es bastante fácil determinar las ocho maneras de emparejarse:

[(A, B), (C, E), (D, F)] [(A, B), (C, F), (D, E)]
[(A, C), (B, D), (E, F)] [(A, C), (B, F), (D, E)]
[(A, D), (B, C), (E, F)] [(A, D), (B, F), (C, E)]
[(A, E), (B, C), (D, F)] [(A, E), (B, D), (C, F)]

30 Nivel I CP XVI

Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?

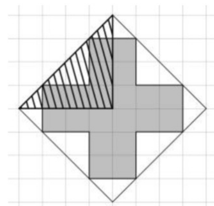


A) 24 **B)** 32 **C)** 36

D) 40 **E)** 48

PRIMERA SOLUCIÓN

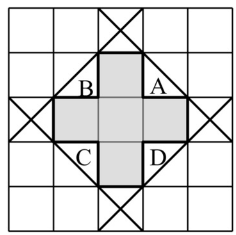
(B) Dado que el perímetro de la cruz mide 24 cm y que tiene 12 lados iguales, la longitud del lado es 24 : 12 = 2 cm, con lo que el lado de cada cuadradito del teselado mide 1 cm.



Si nos fijamos ahora en el triángulo rectángulo equilátero (rayado) de la figura, vemos que sus dos catetos miden cada uno 4 cm y, además, su hipotenusa al cuadrado es justamente el área del cuadrado, pedida. Por consiguiente, el área del cuadrado es igual a: $4^2 + 4^2 = 32$ cm^2.

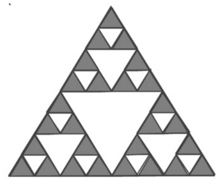
SEGUNDA SOLUCIÓN

(B) Para este tipo de problemas suele ser buena estrategia comenzar por sumergir la figura en un teselado sobre el que dibujar la figura original.



Si dibujamos la cruz sobre un teselado de cuadraditos de 2 cm de lado, como se muestra en la figura, es obvio que los triángulos A, B, C y D equivalen, en área, a 2 cuadraditos, y los 4 pequeños triángulos de los vértices a 1 cuadradito de la tesela. Por lo tanto, el área del cuadrado es: $(5 + 2 + 1) \times 4 = 32$ cm^2.

31 Nivel I CP XVI

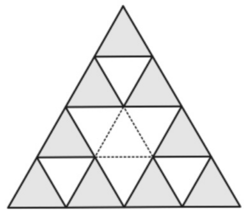


¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?

A) $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

PRIMERA SOLUCIÓN



(B) El triángulo original está dividido en cuatro triángulos de igual área y, cada uno de ellos puede ser dividido en 16 pequeños triangulitos iguales. Así mismo vemos que el central tiene sus 16 triangulitos pintados de blanco, mientras que los otros tres, que son como el de esta figura, solo tienen 7 blancos cada uno. Tenemos pues $4 \times 16 = 64$ triangulitos, de los que $16 + 7 \times 3 = 37$ son blancos.

En consecuencia, la fracción pintada de blanco es $\frac{37}{64}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

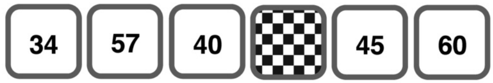
(B) Podemos enfocar el problema desde un punto de vista aritmético.

En el triángulo original tenemos triángulos blancos de tres tamaños distintos y, como ya hemos visto, el grande es la cuarta parte, en área, del original; cada uno de los tres triángulos intermedios es la cuarta parte del grande y, los nueve pequeños tienen la cuarta parte de superficie que los intermedios. En consecuencia, la fracción del triángulo que está pintada de blanco es:

$$\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{64}.$$

32 Nivel I CP XVII

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?



A) 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

(D) Si bailamos las cifras de los números visibles y eliminamos los que son de una cifra (04 y 06) y los que no son múltiplos de 3 (43), nos quedan el 75 y el 54. Pero como no puede ser ni el mayor ni el menor de la lista original, descartamos el 75 y nos queda necesariamente el 54. Sus cifras suman 9.

Puede observarse que, aun considerando válidas las tarjetas 04 y 06, también habría que desecharlas ya que 04 no es múltiplo de 3 y 06 sería la menor.

33 Nivel I CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(D) Don Retorcido nació entre los años 1600 y el 1699.

Para que quede un número cuadrado perfecto al eliminar la cifra de las unidades, la cifra de las decenas tiene que ser un 9, ya que 169 es el único cuadrado perfecto comprendido entre 160 y 169.

Por tanto, Don Retorcido habrá nacido entre los años 1690 y 1699.

Como la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas entonces su año de nacimiento es 1698. La suma de las cifras de 1698 es: $1 + 6 + 9 + 8 = 24$.

34 Nivel I CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:
- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

¿Cuál de los amigos es el actor?

A) Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

E) No se sabe con certeza

(B) Veamos en primer lugar qué dice cada proposición sobre los oficios de los amigos: La 1ª dice que Adrián NO es profesor. La 2ª dice que Javier NO es actor. La 3ª dice que Álvaro y Juan NO son pintores. La 4ª dice que Juan NO es tenista NI actor. La 5ª dice que Adrián y Álvaro NO son tenistas.

Una forma de abordar el problema es construir una tabla de doble entrada. Pondremos SÍ o NO en cada casilla según corresponda.

	Profesor	Actor	Pintor	Tenista
Adrián	**NO**			**NO**
Javier		**NO**		
Álvaro			**NO**	**NO**
Juan		**NO**	**NO**	**NO**

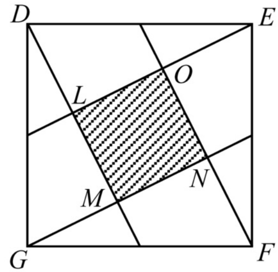
Teniendo en cuenta que cada amigo tiene uno y solo uno de los cuatro oficios, deducimos que en cada fila y en cada columna habrá un solo SÍ y tres NO. Rellenamos con este criterio y terminamos:

	Profesor	Actor	Pintor	Tenista
Adrián	**NO**	**NO**	**SÍ**	**NO**
Javier	**NO**	**NO**	**NO**	**SÍ**
Álvaro	**NO**	**SÍ**	**NO**	**NO**
Juan	**SÍ**	**NO**	**NO**	**NO**

Concluimos que Álvaro es el actor.

35 Nivel I CP XVIII

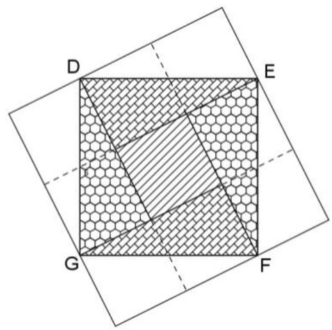
En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en cm^2?



A) 20 **B)** 25 **C)** 35
D) 40 **E)** 50

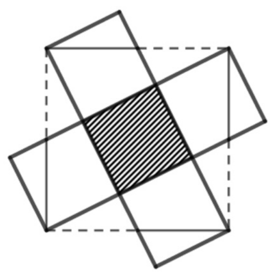
PRIMERA SOLUCIÓN

(A) En este tipo de problemas suele ser muy útil completar la figura de forma que quede dividida en partes iguales más pequeñas.
Completando el cuadrado, mediante el trazado de paralelas equidistantes como se muestra en la figura, se hace evidente que nuestro cuadrado original puede seccionarse en cinco polígonos de igual área que el cuadrado rayado: cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado original *LMNO*.
Por tanto, el área del cuadrado mide la quinta parte de 10^2, es decir, 20 cm^2.



SEGUNDA SOLUCIÓN

(A) Otra forma de resolverlo es girando los triangulitos blancos y recolocarlos para formar una cruz de cinco cuadrados iguales.
Como el área total mide 10^2 = 100 cm^2, el área de cada cuadradito mide 100 : 5 = 20 cm^2.



36 Nivel I CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Para números de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número *n* de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos $9 + 20 \times 4 = 89$ posiciones y como la decena de los *cincuenta* ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontraremos la cifra 5.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Vamos a separar el número en bloques:
El primer bloque lo forman 123456789 y son en total 9 cifras.
El segundo bloque lo forman **1**0 **1**1 **1**2 **1**3 **1**4 **1**5 **1**6 **1**7 **1**8 **1**9 y son 20 cifras (10 números de dos cifras, 10×2)
El tercer bloque lo forman los **2**0 **2**1 **2**2....**2**9.
El cuarto bloque lo forman los **3**0 **3**1 **3**2....**3**9.
El quinto bloque lo forman los **4**0 **4**1**4**2....**4**9.
De esta manera, como $100 = 9 + 20 + 20 + 20 + 20 + 11$, la cifra que ocupa la posición 100 se encuentra en los CINCUENTA: **5**0 **5**1 **5**2 **5**3 **5**4 **5,** entonces la cifra es 5.

37 Nivel I CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

A) 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

(B) Las probabilidades que se dan en el enunciado permiten calcular de inmediato el número de bolas rojas y el número de bolas azules.
Como la probabilidad de sacar una bola roja es 1/2, la mitad de las bolas de la bolsa serán rojas y como en total hay 60 bolas, 30 son rojas.
Como la probabilidad de sacar una azul es 3/10, por cada 10 bolas debe haber 3 azules y como en total hay 60 (6 veces 10) bolas, 6 x 3 = 18 son azules.
El resto de las bolas son verdes, es decir $60 - (30 + 18) = 12$ bolas.

38 Nivel I CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

A) Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

(D) Está claro que Euclides miente.
Comencemos pensando que Arquímedes es el único que dice la verdad. Entonces Bernoulli miente y Cantor también estaría diciendo la verdad, lo cual no puede ser.
Pensemos ahora que es Bernoulli el único que dice la verdad. En ese caso Diofanto también diría la verdad, pues el culpable sería Cantor y no él, y esto no puede ser.
Si Cantor es el único que dice la verdad, entonces Diofanto miente y, por tanto, ha sido Diofanto y el resto también miente. Parece que hemos hallado nuestra solución y ha sido Diofanto quien ha desordenado los números de Don Retorcido.
¿Podría ser que Diofanto fuera el único que dice la verdad? No, esto no es posible pues o bien Bernoulli o bien Cantor también dirían la verdad.

39 Nivel I CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

(D) Es obvio que tenemos que restar a los días en que le toca hacer abdominales, los días en los que además le toca bailar más aquellos en los que, además de abdominales, le toca jugar al tenis. Pero haciendo esto habremos restado dos veces los días en los que haya tres coincidencias, por lo que tendremos que sumar esos días.

En los próximos 100 días le toca hacer abdominales 25 días porque $100 : 4 = 25$.

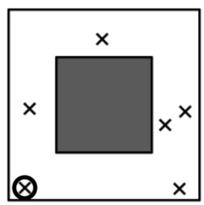
Dado que el mcm de 4 y 5 es 20, en esos mismos días tendrá $100 : 20 = 5$ coincidencias de abdominales con baile.

Como el mcm de 4 y 6 es 12 y, al dividir 100 entre 12 obtenemos: $100 = 12 \times 8 + 4$, existirán 8 coincidencias de abdominales y tenis.

Y como el mcm de 4, 5 y 6 es 60, en los próximos 100 días, hay 1 día de triple coincidencia que lo hemos contado dos veces.

Por tanto, el número de días que hará abdominales es: $25 - 5 - 8 + 1 = 13$.

40 Nivel I CP XX



Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?

A) Bea **B)** Carla **C)** Dani

D) Emilio **E)** Fani

(C) Realmente hubiese bastado que nos dijesen "Emilio solo ve a Dani", ya que el único que ve solamente a otro es el situado verticalmente encima del redondelito. Luego en el redondelito está Dani.

41 Nivel I CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

A) 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

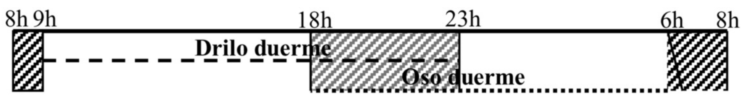
(A) Como los pájaros se comieron tres cuartos de las migas, dejaron un cuarto sin comer, esto es, las 1200 que quedaron suponen la cuarta parte de las migas que tiraron Hansel y Gretel, así que el total de migas tiradas es $4 \times 1200 = 4800$. Dado que han arrojado una miguita cada medio metro, el total de los metros recorridos ha sido: $48000 \times \frac{1}{2} = 2400$ m = 2,4 km.

42 Nivel I CP XXI

Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.
¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

A) 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

(C) Queremos saber la distancia recorrida en 24 horas, por lo que debemos estudiar lo que sucede desde las 8 de la mañana de un día hasta las 8 del día siguiente.
Es importante tener en cuenta las horas en las que se producen los cambios de dormir a no dormir y viceversa de Oso y de Drilo. Estas horas, ordenadas desde las 8 de la mañana son: las 9, las 18, las 23 y las 6, como se muestra en el esquema temporal siguiente:



Hemos rayado las horas en las que ambos están dormidos o ambos despiertos para indicar que en esos tramos recorren 0 km.
Solo resta calcular lo que recorren hacia el norte y hacia el sur:
De 9 a 18, Drilo duerme y Oso está despierto, por lo que recorre 10 km cada hora hacia el norte. Como en ese periodo de tiempo transcurren 9 horas, recorre $10 \times 9 = 90$ km hacia el norte.
De 23 a 6, Oso duerme y Drilo está despierto, por lo que recorre 2 km cada hora hacia el sur. Como en ese periodo de tiempo transcurren 7 horas, recorre $2 \times 7 = 14$ km hacia el sur.
Resumiendo lo que ocurre en 24 horas: Osodrilo recorre 90 km hacia el norte y 14 km hacia el sur. Por tanto, transcurrido ese tiempo se encontrarán a 76 km del claro, puesto que $90 - 14 = 76$ km.

43 Nivel I CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

(A) Para facilitar la resolución del problema, nombramos *Trinafantus* con TF y *Loca-Cola* con LC.

Seguimos estos pasos:

En el vaso de Juan hay 1/2 (50%) de TF y 1/2 (50%) de LC.

Después de que Olivia bebiese la mitad del contenido quedan en el vaso un cuarto (1/4) de TF y un cuarto (1/4) de LC.

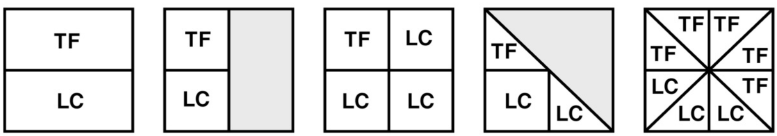
A continuación, rellena el vaso con 1/2 de LC. Ahora en el vaso hay un cuarto (1/4) de TF y tres cuartos (3/4) de LC.

Después de que Rafa bebiese la mitad del contenido de vaso, queda un octavo (1/8) de TF y tres octavos (3/8) de LC.

Finalmente rellena el vaso con 1/2 de TF. El vaso contiene 5/8 de TF y 3/8 de LC

Quedan en el vaso tres octavos (3/8) de Loca-Cola.

Puede resultar de ayuda tratar geométricamente el problema mediante un esquema como el de la figura.



44 Nivel I CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

777	495	1000	888
301	238	658	735
357	26	764	336
154	343	922	989

A) ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
C) ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
E) ¿La cifra de las unidades es 8?

(E) La respuesta afirmativa a las dos primeras preguntas selecciona los números 1000, 238, 26, 336, 154 y 922. En principio, la pregunta E resuelve el problema pues solo el número 238 se ajusta a ella.
No obstante, podemos comprobar que entre los números seleccionados hay dos múltiplos de 4 (1000 y 336) y que otros dos incluyen la cifra 6. Además, ninguno es tal que la suma de sus cifras es mayor que 18 y hay 3 múltiplos de 7 (238, 336 y 154). Confirmamos pues que la tercera pregunta es la E.

45 Nivel I CP XXII

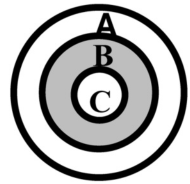
Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

$$\begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ A & D & A & N \\ \hline O & N & D & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ H & A & D & A \\ \hline M & I & M & O \end{array}$$

A) 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

(E) La columna de las unidades de la segunda suma implica A = 0 o A = 5.
Si A = 0, mirando la columna de las decenas de la segunda suma obtendríamos D = 0, pero como letras distintas representan números distintos, desechamos esa solución.
Si A = 5, la columna de los millares de la primera suma conduce a O = 6. A continuación la columna de las unidades de la primera suma lleva a N = 4; la columna de los millares de la primera suma hace D = 9; la columna de las decenas de la primera suma implica M = 3 y la columna de los millares de la segunda suma hace I = 1.
Por tanto, N + I + D + O = 4 + 1 + 9 + 6 = 20.

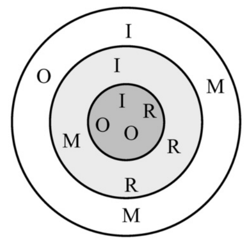
46 Nivel I CP XXIII



Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?

A) 42 **B)** 46 **C)** 48

D) 50 **E)** 54



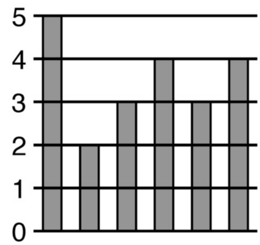
(D) Si nos fijamos bien, el problema es muy sencillo. Más aún si nos ayudamos de un esquema como el de la figura, donde la inicial de cada uno de los nombres representa el dardo que ha lanzado.

Vemos con claridad que entre los tres (Marta, Rafa y Olivia) han clavado 3 dardos en cada zona, y han sumado 36 + 56 + 58 = 150 puntos en total.

Esto implica que tres dardos, repartidos en las tres zonas, suman 150 : 3 = 50 puntos.

Dado que Inés ha clavado un dardo en cada zona, sumará 50 puntos.

47 Nivel I CP XXIII



En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?

A) 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5

D) 4,2 **E)** 3

(C) Basta saber leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis números leídos: $\frac{5+2+3+4+3+4}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$.

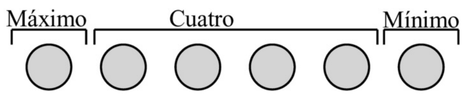
48 Nivel I CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

A) 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

PRIMERA SOLUCIÓN

(D) Escoger cinco monedas entre seis de forma que sumen lo máximo posible equivale a quitar una de mínimo valor. Y escoger cinco de modo que sumen lo mínimo posible equivale a retirar una moneda de máximo valor:



Quitar la moneda de mínimo valor conduce a "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 €.
Quitar la moneda de máximo valor conduce a "Cuatro" + "Mínimo" = 1,10 €.
Por tanto, la diferencia entre la moneda mayor y la menor es 1,50 – 1,10 = 0,40 €.
Dado que las monedas posibles son de 2 €; 1 €; 0,50 €; 0,20 €; 0,10 € y 0,05 €, comprobamos que la única forma de conseguir que la diferencia de dos monedas sea 0,40 € es que una sea de 0,50 € y la otra de 0,10 €. Por consiguiente, la moneda de mayor valor es de 0,50 € y la de menor valor es de 0,10 €.
Si a la igualdad "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 € le sumamos la moneda menor tenemos ya la cantidad total de dinero:
"Máximo" + "Cuatro" + "Mínimo" = 1,50 + 0,10 = 1,60 €.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(D) La diferencia entre 1,50 y 1,10 es 0,40, por lo que la diferencia entre las monedas que no se cogen al sumar las cinco es de 0,40 €. De esta manera ya sabemos que la moneda o una de las monedas de mayor cuantía es de 0,50 € y la moneda o una de las monedas de menor cuantía es 0,10 €:
0,10 €, Moneda 2, Moneda 3, Moneda 4, Moneda 5, 0,50 €.
Como la menor suma es 1,10 €, entonces:
Moneda 2 + Moneda 3 + Moneda 4 + Moneda 5 = 1 €.
Todas de 0,10 € sería imposible porque suma 0,40 € y todas de 0,20 € también por sumar 0,80 €, por ello, una de ellas tiene que ser de 0,50 €, la Moneda 5 es de 0,50 €. Y las tres restantes tiene que sumar 0,50 € y la única manera es 0,10 €, 0, 20 € y 0,20 €.
Recojamos lo que hemos obtenido hasta el momento:
0,10 €; Moneda 2 = 0,10 €; Moneda 3 = 0,20 €; Moneda 4 = 0,20 €; Moneda 5 = 0,50 €; 0,50 €.
Sumamos todas ellas 0,10 € + 0,10 € + 0,20 € + 0,20 € + 0,50 € + 0,50 € = 1,60 €.

49 Nivel I CP XXIV

Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

	C	***A***	***T***
D	3		
O	18		
G		14	

A) 38 **B)** 52 **C)** 40

D) 56 **E)** 36

(D) Partamos en primer lugar de los números 3 y 18 obtenidos de las igualdades: $D \times C = 3$; $O \times C = 18$ y no olvidemos que todas las letras representan números de una cifra.

La primera igualdad nos dice que la pareja (D, C) es (1, 3) o (3, 1). Pero si $C = 1$ la segunda lleva a $O = 18$ y como esto es imposible, tenemos que $C = 3$ y, por tanto, $D = 1$ y $O = 6$.

Al objeto de facilitar los cálculos recogemos estos resultados en la tabla adjunta.

	3	***A***	***T***
1	3		
6	18		
G		**14**	**28**

Tomemos ahora el número 14. Este se descompone de forma única como $14 = 2 \times 7 = G \times A$, lo que nos dice que (G, A) es (2, 7) o (7, 2). Ahora utilizaremos el 28 para decidir el valor de la pareja (G, A), pero necesitamos conocer la casilla que ocupa.

El 28 no puede estar en la primera fila porque entonces A o T serían 28. Tampoco puede estar en la segunda por no ser múltiplo de 6, y no puede ocupar la primara casilla de la tercera fila por no ser múltiplo de 3. En consecuencia, 28 ocupa la tercera casilla de la tercera fila.

Tenemos al fin: $G \times A = 2 \times 7$ y $G \times T = 28$. Pero G no puede ser 2 porque entonces T sería 14.

Por lo tanto, $G = 7$; $A = 2$ y $T = 4$.

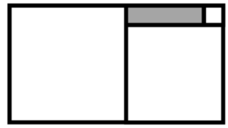
Disponemos ya de la tabla completa. Los tres productos de la tercera columna suman:

$(1 \times 4) + (6 \times 4) + (7 \times 4) = 4 + 24 + 28 = 56$.

	3	**2**	**4**
1	3	2	4
6	18	12	24
7	21	14	28

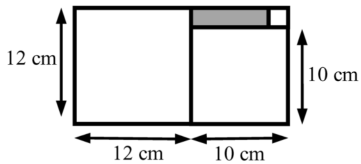
50 Nivel I CP XXIV

Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm^2, tiene el rectángulo gris?



A) 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

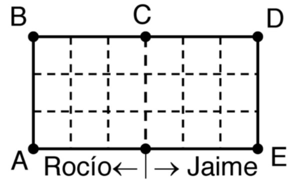
(A) El lado del cuadrado mayor mide 12 cm y, por tanto, el del cuadrado mediano mide 10 cm. Así podemos saber ya que el cuadrado menor tiene 2 cm de lado. Por tanto, el rectángulo gris tiene una base de 8 cm y una altura de 2 cm, por lo que su área mide 16 cm^2.



Soluciones - Nivel II

1 Nivel II CP I

Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:

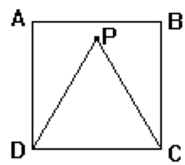


A) A **B)** B **C)** C
D) D **E)** E

(D) El perímetro de la figura es 18 y como Rocío recorre dos lados de cuadrado por cada uno que recorre Jaime, cuando Jaime haya recorrido x Rocío habrá recorrido $2x$, siendo $2x + x = 18$, es decir $x = 6$ y contando 6 lados desde el punto de partida en el sentido de Jaime, llegamos a que, de los puntos dados, el más cercano del punto de encuentro es el *D*.

2 Nivel II CP II

ABCD es un cuadrado y *P* un punto dentro del cuadrado tal que *CDP* es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$?



A) 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º
E) No hay suficiente información

(A) El ángulo $P\hat{C}B$ mide 30º y el triángulo *CPB* es isósceles siendo 180 – 30 = 150º la suma de los dos ángulos iguales, así que el ángulo $P\hat{B}C$ mide 150 : 2 = 75º .

3 Nivel II CP III

Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de x?

			9				x				7		

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

(B) Llamemos a, b, c a las cifras de los cuadrados que hay entre 9 y x.

			9	a	b	c	x				7		

Entonces $9 + a + b = 20 = a + b + c$, de donde se sigue que $c = 9$. Llamemos ahora d, e, f a las cifras de los cuadrados que hay entre x y 7.

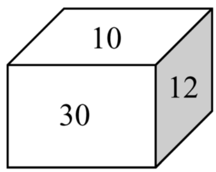
			9	a	b	c	x	d	e	f	7		

Razonando de la misma manera, $d + e + f = 20 = e + f + 7$, concluimos que $d = 7$.

Por último, como $c + x + d = 20$ y ya sabemos que $c = 9$ y $d = 7$, entonces, $x = 4$.

4 Nivel II CP III

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm^2. ¿Cuál es, en cm^3, el volumen de la caja?



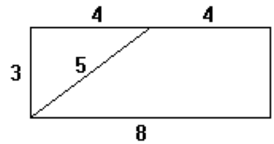
A) 60 **B)** 52 **C)** 3600

D) 300 **E)** 120

(A) Llamando a, b y c a las dimensiones en cm de la caja, sé que $ab = 30$, $bc = 12$, $ac = 10$, por lo que multiplicando esas tres igualdades, llegamos a que $(abc)^2 = 3600$.
Por tanto, el volumen de la caja, que es el producto de sus tres dimensiones, abc, será 60 cm^3.

5 Nivel II CP IV

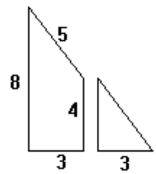
Cortamos un rectángulo de 3×8 en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:



A) 9 **B)** 6 **C)** 4

D) 7 **E)** 5

(B) Colocando las piezas como indica la figura, un lado del triángulo mide 6 y la respuesta es B.



6 Nivel II CP IV

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

A) 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

(C) Cada cero del producto vendrá de la existencia de un factor 5 y un factor 2. Como en el número dado hay 3 ochos, habrá 9 doses y aunque haya 14 cincos (7 veinticincos), habrá sólo 9 parejas de doses y cincos, por lo que el número dado acabará en 9 ceros.

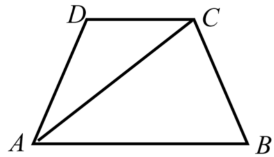
7 Nivel II CP V

¿Para cuántos enteros positivos n es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

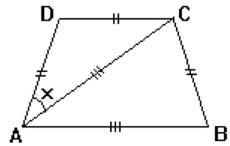
(E) Al dividir $n + 17$ entre $n - 7$, descomponemos la fracción $\frac{n+17}{n-7}$ como $1+\frac{24}{n-7}$. Así pues, hay que encontrar los números enteros n tales que $n - 7$ sea un divisor de 24. Como 24 tiene por divisores (1, 24), (2, 12), (3, 8) y (4, 6), es decir, 8 divisores, existen 8 valores de $n - 7$ que son divisores de 24. Por tanto, hay 8 valores de n que cumplen la condición pedida.

8 Nivel II CP V



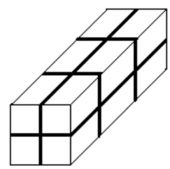
En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?

A) 108º **B)** 120º **C)** 130º
D) 150º **E)** Faltan datos



(A) Si llamamos x al ángulo $C\hat{A}D$, tenemos que, como $AD = DC$, el triángulo ADC es isósceles y el ángulo $A\hat{C}D$ también es x. Al ser $A\hat{C}D$ y $B\hat{A}C$ alternos internos, $B\hat{A}C$ también es x.
Por otra parte, $ABCD$ es un trapecio isósceles, por lo que el ángulo $A\hat{B}C$ es igual al ángulo $B\hat{A}D$, es decir, $2x$. Y por ser $AB = AC$, el ángulo $A\hat{C}B$ es también $2x$, de modo que $B\hat{C}D = C\hat{D}A = 3x$.
Así pues, $3x + 3x + 2x + 2x = 360 \Rightarrow x = 36º$ y el ángulo $\hat{D}$, que es $A\hat{D}C$ mide $3 \cdot 36 = 108º$.

9 Nivel II CP VI



Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son 10 × 10 × 30 cm, ¿Cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?

A) 200 **B)** 240 **C)** 250
D) 260 **E)** 300

(E) Fijándonos en el dibujo se aprecia que vemos justo la mitad de la caja, así que podemos contar la cinta adhesiva que vemos y multiplicar por dos. Vemos 120 cm de cinta, luego el total de cinta empleada es 240 cm.

10 Nivel II CP VI

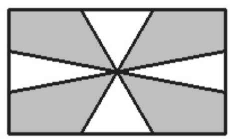
Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

A) En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca

D) Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

(A) En estos problemas de lógica debemos ser muy meticulosos para no dejarnos ningún caso por analizar y así poder descartar los que no cumplan las condiciones del enunciado. Podemos empezar fijándonos en los colores de las cajas (B, A, V).
Los seis casos posibles son: ABV, AVB, BAV, BVA, VAB, VBA y descartamos todos aquellos en los que V no esté a la izquierda de B, por lo que solo nos quedan tres casos: AVB, VAB, VBA.
Como A debe estar a la derecha de un caja (la que tiene la canica), descartamos AVB y ya solo nos quedan VAB y VBA. Como la peonza está a la derecha de A debemos descartar VBA y ya solo nos queda VAB.
La situación es, por tanto: V (canica), A (moneda), B (peonza).
La moneda está en la caja amarilla.

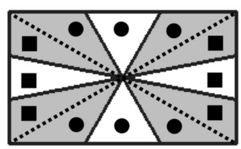
11 Nivel II CP VI



La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?

A) 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$



(B) Si trazamos las diagonales del rectángulo se forman un buen número de triángulos.
Los que tienen un círculo tienen todos ellos la misma área. ¿Por qué? Porque tienen la misma base y la misma altura.
Y los que tienen un cuadradito también son todos ellos de igual área por la misma razón.
Y ya solo queda contar: los triángulos blancos tienen 2 cuadrados y 2 círculos; y los triángulos grises tienen 4 cuadrados y 4 círculos. Así pues, la parte blanca es la mitad de la parte gris.

12 Nivel II CP VII

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14 789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

(B) Por construcción, el nuevo número tiene dos cifras más que el primero y además al restarle éste sigue teniendo dos cifras más. Así si ha aumentado en 14789 nuestro número de partida era de tres cifras *abc*. Basta plantear la suma en la forma habitual para hallar que $c = 2$, $b = 3$, a = 5.
El número original es 532 y sus cifras suman 10.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ & + & a & b & c \\ \hline 1 & a & b & c & 1 \end{array}$$

13 Nivel II CP VII

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

(D) Para que el producto de los números sea múltiplo de 5, uno de ellos debe ser múltiplo de 5. De los 36 casos posibles (hay que tener en cuenta el orden para que sean equiprobables), once son favorables: 6 casos en que en el primer dado sale un 5, y 5 casos en que en el primer dado no sale un 5 pero el segundo sí sale un 5.

14 Nivel II CP VIII

En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

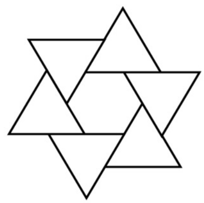
A) Cuestan más los discos **B)** Cuestan más los comics

C) Un disco cuesta menos de 3 euros **D)** Un comic y un disco cuestan 4 euros

E) Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

(E) Podemos intentar resolver el problema por exclusión. Una ojeada nos dice que una posible solución sería que comics y discos costaran 2 € cada uno. Eso excluye las soluciones A) y B). ¿Podría un disco costar 3 €? En ese caso, por la primera condición, los comics valdrían 1 €, y eso es compatible con la segunda condición. Luego C) no tiene por qué ser cierto. Hasta ahora las dos soluciones encontradas verifican D) y E). ¿Y costar un disco 4 €? Podría ser, los discos 4 € y los comics 1 €. Sólo nos queda E) y ya no hay más soluciones (salvo que los comics nos los regalen, lo cual no parece que se contemple en el enunciado, pero incluso en ese caso se cumpliría E).

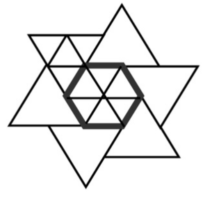
15 Nivel II CP VIII



El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?

A) $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$

D) $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$



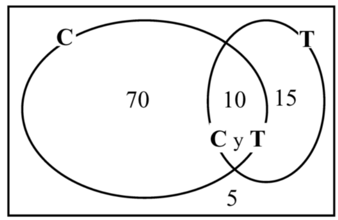
(D) La división del hexágono central y de los triángulos en triangulitos iguales nos da la relación de las áreas pedidas, $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

16 Nivel II CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5% **E)** $\frac{1}{12}$

(D) Si tomamos un total de 100 personas y dibujamos el correspondiente diagrama de Venn:



Cine y Teatro: 10

Cine: $\frac{4}{5} \times 100 = 80 \quad (10 + 70)$.

Teatro: $\frac{1}{4} \times 100 = 25 \quad (10 + 15)$.

Ni Cine ni Teatro: 100 – (70+15+10) =100 – 95 =5 $\Rightarrow$ 5 %.

17 Nivel II CP IX

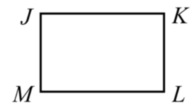
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

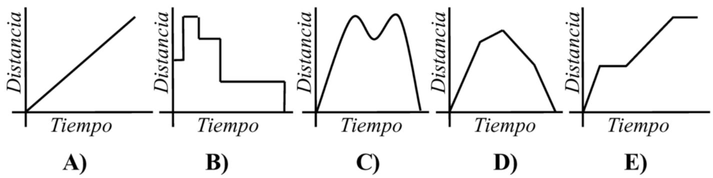
A) 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

(E) Numerando los árboles desde la casa de Alicia a la ida ha puesto lazos en los impares, y a la vuelta lo ha hecho en los números 57, 54, 51, ... , es decir en los múltiplos de 3. Quedarán sin lazo los pares que no sean múltiplo de 3. Del 1 al 57 hay 28 pares. Los múltiplos de 3 son el 6, 12, ... , y el 54 (nueve en total). Por tanto se quedaron sin lazo 19 árboles.

18 Nivel II CP X

María sale a correr desde la esquina J del campo rectangular $JKLM$ yendo en este sentido: $J – K – L – M – J –$... ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?





(D) Cuando María sale, la distancia al punto de partida es cero y eso vuelve a ocurrir cuando completa una vuelta. Sólo dos gráficas tienen dos veces distancia cero. Pero la distancia a J aumenta hasta llegar a L y luego disminuye hasta llegar a J. Ese comportamiento sólo lo refleja la gráfica D.

19 Nivel II CP XI

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: “Ayer me tocó mentir” dijo Zipi. “Pues a mí también me tocó mentir” dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

A) Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

(C) Empezamos por descartar que sea domingo, porque no es posible que los dos digan la verdad, ya que entonces el día anterior habrían mentido ambos y eso no ocurre ningún día. Así uno miente y el otro dice la verdad. Es cierto entonces que a uno el día anterior le tocaba mentir, y por ello ha cambiado de mentir a decir la verdad. Eso sólo le puede ocurrir a Zipi que pasa de mentir a decir la verdad en días consecutivos, pero no a Zape. Luego el diálogo lo tuvieron en jueves.

20 Nivel II CP XII

El número m verifica que cada pareja de los números 24, 42 y m tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y m tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es m?

A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

(E) Para resolver este ejercicio hemos de tener muy claras las reglas para calcular el máximo común divisor (mcd) y el mínimo común múltiplo (mcm).
En primer lugar se nos dice que mcd (24, 42) = mcd (24, m) = mcd (42, m).
Calculamos mcd (24, 42): $24 = 2^3 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, luego mcd (24, 42) = $2 \cdot 3$.
Como mcd (24, m) = $2 \cdot 3$, y $24 = 2^3 \cdot 3$, se deduce que m ha de tener como factores el 2 y el 3.
Como mcd (42, m) = $2 \cdot 3$, y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, se llega a la misma conclusión anterior.
Por otra parte se nos dice que mcm (6, 15) = mcm (6, m) = mcm (15, m).
Calculamos mcm (6, 15): $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, luego mcm (6, 15) = $2 \cdot 3 \cdot 5$.
Como mcm (6, m) = $2 \cdot 3 \cdot 5$ y $6 = 2 \cdot 3$, se deduce que m ha de tener como factor el 5.
Como mcm (15, m) = $2 \cdot 3 \cdot 5$ y $15 = 3 \cdot 5$, se deduce que m ha de tener como factor el 2 (condición ya obtenida antes).
Luego el número m ha de ser igual a $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

21 Nivel II CP XII

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

$$\begin{array}{cccc} P & Q & R & S \\ & & \times & 9 \\ \hline \mathbf{S} & \mathbf{R} & \mathbf{Q} & \mathbf{P} \end{array}$$

A) P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7

D) S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

(C) P es 1 ya que después de multiplicar por 9 y sumar lo que se lleve da lugar a una sola cifra S. Por ello S = 9 y como Q no es 1, tiene que ser Q = 0, pues si no al multiplicarla por 9 llevaría alguna unidad hacia delante. Entonces $9 \times 9 = 81$ y llevamos 8, que sumados al producto $9 \times R$ acaba en 0, es decir R = 8.
Luego PQRS = 1089, que es múltiplo de 9. [1089 × 9 = 9801]
La afirmación falsa es R = 7.

22 Nivel II CP XIII

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

A) 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

(B) Empezamos escribiendo en fila los catorce números:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42

y busquemos aquellos números que solo pueden elegir una pareja.
El 9 solo puede juntarse con el 27 (9, 27). El 12 con el 24 (12, 24). El 15 con el 21 (15, 21). Y así seguimos con cuidado: (6, 30), (3, 33), (39, 42).
Quedan sin pareja 18 y 36, que suman 54. [Y si quieren pueden emparejarse en otro juego matemático]

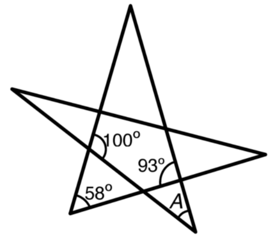
23 Nivel II CP XIII

Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?} \cdot 6^{?} \cdot 9^{?} \cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

(E) Don Retorcido bien sabe que las potencias de 6 siempre acaban en 6, y las potencias de 11 lo hacen en 1. Para el nueve nos dice que el exponente acaba en 5, y por tanto es impar, que es el dato que nos falta para saber la terminación de la potencia del 9, ya que éstas se alternan en 9 ó 1, según el exponente sea impar o par. Nos queda la terminación de las potencias de 2, y éstas siguen el ciclo: 2, 4, 8 y 6 , de forma que si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6, de forma que $2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2$, acaba en lo mismo que $6 \cdot 2$, es decir en 2.
Es el momento de recoger las terminaciones obtenidas y multiplicarlas: $2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1$ acaba en 8.

24 Nivel II CP XIV



Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo *A*?

A) 35º **B)** 42º **C)** 51º

D) 65º **E)** 109º

(C) En la figura vamos calculando los ángulos:

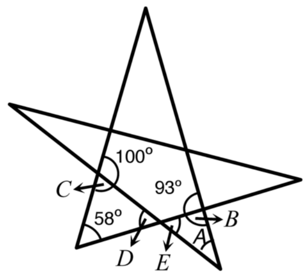
$B = 180º - 93º = 87º$

$C = 180º - 100º = 80º$

$D = 180º - (58º + 80º) = 180º - 138º = 42º$

$E = 42º$ (por opuestos por el vértice)

$A = 180º - (42º + 87º) = 180º - 129º = 51º$



25 Nivel II CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

A) 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

(E) Los números formados por las dos últimas cifras que al multiplicarlos por 2 dan lugar a números de dos cifras son 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ... 49, que originan, respectivamente, los 45 números *dobledés* siguientes: 1005, 1206, 1407, ... 9849.

26 Nivel II CP XIV

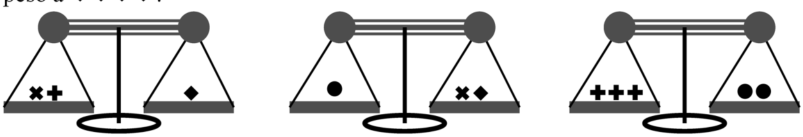
En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

A) 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

(A) Si llamamos respectivamente, a, b y c, a los votos que obtuvieron Alicia, Beatriz y Carlos, tenemos que $a = \frac{5}{6} \cdot b = 300$, luego $b = \frac{6}{5} \cdot 300 = 360$, y como además, $b = \frac{80}{100} \cdot c = 0{,}8 \cdot c = 360 \Rightarrow c = 450$ votos.

27 Nivel II CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

(C) Tenemos que jugar con los platillos. Vamos a utilizar el signo = para indicar que pesan lo mismo.
Observando la primera balanza podemos asegurar que ◆◆ = ✖✖✚✚, por tanto ◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚
Según la segunda balanza, podemos añadir otra igualdad:

◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚.

Y como la tercera balanza nos asegura que 2 círculos pesan lo mismo que 3 cruces, entonces:

◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚ = ✚✚✚✚✚

Luego 4 rombos pesan lo mismo que 5 cruces.

28 Nivel II CP XV

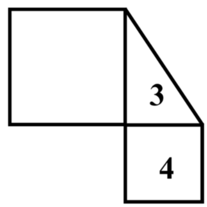
Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

UNA: Vaqueros y corbata | **DOS:** Vaqueros sin corbata
TRES: Sin vaqueros y con corbata | **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

A) La UNA y la DOS | **B)** Solo la DOS | **C)** Solo la TRES
D) La TRES y la CUATRO | **E)** La DOS y la TRES

(E) Podemos parafrasear las decisiones de don Retorcido. Impar significa que lleva corbata y vaqueros, y par que no lleva corbata ni vaqueros. Es decir o las dos piezas a la vez o ninguna de las dos. Luego no son posibles las combinaciones DOS y TRES.

29 Nivel II CP XVI



En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?

A) 9 | **B)** 8 | **C)** 7
D) 6 | **E)** 5

(A) Como el área del cuadrado chico es 4, su lado (que coincide con la base del triángulo) es 2. Por tanto, la altura del triángulo debe ser 3 para que su área $\frac{2\cdot 3}{3}$ sea 3, como indica el problema.
Ya está, el área del cuadrado grande es 3^2, es decir, 9.

30 Nivel II CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

(B) Carmen puede estar a la derecha de Esteban, a su izquierda o enfrente de él. Como para cada una de estas posiciones hay dos posiciones posibles para María y Joaquín, la probabilidad de que esté enfrente es 1/3.

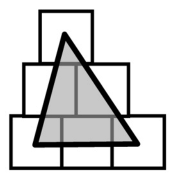
31 Nivel II CP XVII

Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

A) 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

(C) Si para vestir a 90 hadas hacen falta 750 m de hilo, para vestir a 225 necesitaremos $225 \cdot \frac{750}{90} = 1875$ m. Tras vestir a las hadas nos queda 2250 – 1875 = 375 m de hilo con los que podremos vestir a $375 : \frac{750}{150} = 75$ ninfas.

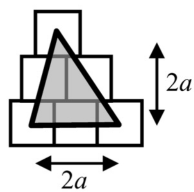
32 Nivel II CP XVII



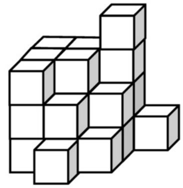
Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm^2, ¿cuántos cm^2 mide el área de un cuadrado?

A) 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

(A) Si llamamos a al lado del cuadrado vemos que la base y la altura del triángulo miden ambos $2a$. Como su área son 24 cm^2, tenemos que $\frac{2a \cdot 2a}{2} = 24$, es decir, $a^2 = 12$ cm^2.



33 Nivel II CP XVII



Sara había construido un gran cubo de $4 \times 4 \times 4$ con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?

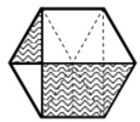
A) 28 **B)** 38 **C)** 26
D) 40 **E)** 37

(B) En la cara superior hay 1 dado. En la que tiene debajo hay 6 dados. En la siguiente hay 2 más, es decir, 8 dados y en la inferior 3 más, es decir, 11 dados. En total hay $1 + 6 + 8 + 11 = 26$ dados. Faltan $64 – 26 = 38$ dados.

34 Nivel II CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

A) 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65



(A) Trazando algunos segmentos convenientes podemos dividir el jardín en triángulos iguales. El trapecio está compuesto de cinco triángulos y, por lo tanto, en cada triángulo he plantado $420: 5 = 84$ margaritas.

35 Nivel II CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

A) 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

(A) Como la media de 100 números se obtiene sumándolos todos y dividiendo entre 100, la suma de los números que había al principio en la pizarra es $86 \cdot 100 = 8600$ y la suma de los 80 que quedaron después es $84 \cdot 80 = 6720$. Así pues, la suma de los 20 que borró el profesor es $8600 – 6720 = 1880$ y su media es $1880 : 20 = 94$.

36 Nivel II CP XIX

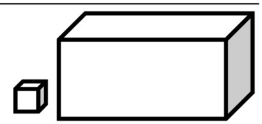
¿Qué me pongo?, *¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

A) 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

(D) Por cada pantalón podrá ponerse siete camisetas así que, entre pantalón y camiseta tiene $4 \cdot 7 = 28$ combinaciones. Además, cada una de esas combinaciones puede ponérsela con tres zapatillas distintas lo que hacen un total de $28 \cdot 3 = 84$ modelitos distintos. Como ya se ha probado 25, puede dudar aún entre $84 - 25 = 59$ posibilidades.

37 Nivel II CP XIX

Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?



A) 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

(A) Vamos a tratar de calcular las dimensiones del bloque inicial.

Como 65 solo puede descomponerse de dos formas, $65 = 65 \cdot 1 = 13 \cdot 5$, deducimos ya que dos de las dimensiones han de ser 13 y 5 (observa que no puede ser 65 y 1 porque si no, nos quedaríamos sin bloque al quitar esa cara).

Las dimensiones iniciales son a, 13 y 5.

Al quitar la cara de los 65 cubitos me queda un bloque de dimensiones $a - 1$, 13 y 5.

Ahora hay que quitar otra cara de 30 cubitos, que solo podré hacerlo con la de dimensiones $a - 1$ y 5. Entonces $(a - 1) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a = 7$.

El bloque inicial tiene dimensiones 13, 7 y 5, lo que nos asegura que estaba formado por $13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$ cubitos.

Como hemos quitado 95 cubitos, ahora nos quedan $455 - 95 = 360$ cubitos.

38 Nivel II CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

A) 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

(C) Fijémonos en la serie de Don Retorcido a ver si descubrimos algo:

3 4 6 7 9 10 12 13 15 16 18 19 ...

¡Solo aparecen los múltiplos de tres y los múltiplos de tres más uno!

Así pues, en la serie estarán estos números:

2013 2014 2016 2017 2019 2020 ...

El número que no aparece es el 2015.

39 Nivel II CP XX

Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta.

+			
	8	12	
	10		
	13		

¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

A) 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

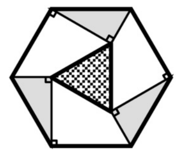
(D) Como es una tabla de sumar, si observamos las casillas del 8 y el 12, deducimos que la segunda columna es la primera columna más cuatro.

El número más alto, 21, estará en la esquina inferior derecha y, por tanto, fijándonos en el 17 y en el 21, deducimos de nuevo que la tercera columna será la segunda columna más cuatro. Comenúmeros se zampó pues un 18. Para terminar la tabla hay que tener en cuenta que no hay números repetidos.

+			
	8	12	
	10	14	
	13	17	

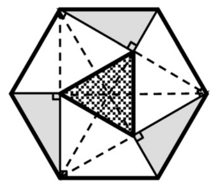
+	7	11	15
1	8	12	16
3	10	14	**18**
6	13	17	21

40 Nivel II CP XX



Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo central?

A) 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24



(D) Si descomponemos el hexágono en figuras iguales es muy fácil resolver este problema. Trazamos algunos segmentos (trazo discontinuo) y…el área del triángulo equilátero grande (sus vértices son vértices alternos del hexágono) es la mitad que la del hexágono, es decir, 60 cm^2. El triángulo central es la cuarta parte del triángulo equilátero grande, por lo que su área mide 60 : 4 = 15 cm^2.

41 Nivel II CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12\cdot 12 = 1156$, $3\cdot 3 = 81$, $45\cdot 45 = 144$, $67\cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

(E) Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:

$$(12)\cdot(12)=1156=[34]\cdot[34]\Rightarrow(1)\to[3]\quad(2)\to[4]$$

$$(3)\cdot(3)=81=[9]\cdot[9]\Rightarrow(3)\to[9]$$

$$(45)\cdot(45)=144=[12]\cdot[12]\Rightarrow(4)\to[1]\quad(5)\to[2]$$

$$(67)\cdot(67)=5625=[75]\cdot[75]\Rightarrow(6)\to[7]\quad(7)\to[5]$$

Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

42 Nivel II CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

A) 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

(B) La suma de los primos menores que 40 es:
$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 = 197$.
Gustavita se equivocó en el número $230 – 197 = 33$. ¡Ay!, 33 es múltiplo de 3.

43 Nivel II CP XXII

¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:
Mi número favorito es el 5 y por eso he pensado en el número A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

A) 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

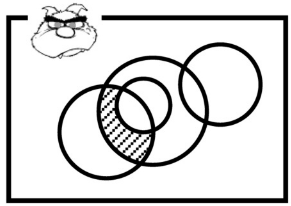
(A) Si multiplicamos un número por 1001 hacemos lo mismo que si lo multiplicamos por (1000 + 1), es decir, primero por 1000 y luego le sumamos el número inicial.
Nuestra suma queda de la forma 555…5000 + 555…5555, teniendo cada número 55 cincos.

$$\begin{array}{rr} & 5\,5\,5\,5\,5 \ldots 5\,5\,0\,0\,0 \\ + & 5\,5 \ldots 5\,5\,5\,5\,5 \\ \hline & 5\,5\,6\,1\,1 \ldots 1\,0\,5\,5\,5 \end{array}$$

Si sumamos las tres últimas cifras obtenemos 3 cincos, la cuarta cifra nos da un cero y nos llevamos una.
Así completamos todas las cifras hasta las tres primeras en las que obtenemos 556 (por la que nos llevamos).
Tenemos entonces: dos cincos al principio, un seis, 51 unos, un cero y y tres cincos al final (en total 58 cifras).
Sumándolos $51 + 5 \cdot 5 + 6 = 82$.

44 Nivel II CP XXII

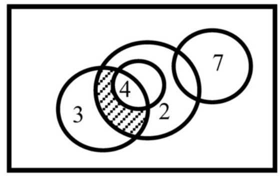
Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



A) 5 **B)** 4 **C)** 3

D) 2 **E)** 1

(D) Tenemos que identificar qué hay en esos círculos. El círculo que está contenido en otro es el que corresponde a los múltiplos de 4 y el que lo contiene es el de los múltiplos de 2. Como no hay múltiplos de 4 y 7 en los números que hay hasta el 20, ya hemos identificado todos los círculos.



La parte rayada corresponde a los múltiplos de 3 y de 2 que no son múltiplos de 4. O sea, el 6 y el 18. Hay dos números.

45 Nivel II CP XXIII

Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

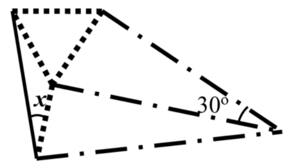
A) $\dfrac{896\,678}{338\,444}=\dfrac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\dfrac{179\,972}{417\,946}=\dfrac{2\,856}{6\,664}$

D) $\dfrac{69\,796}{192\,994}=\dfrac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\dfrac{59\,976}{139\,944}=\dfrac{1\,428}{3\,332}$

(E) Para saberlo debemos hacer los dos productos cruzados y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en A) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en B) uno en 4 y el otro en 2, en C) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en D) son 2 y 4. Por último, en E) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

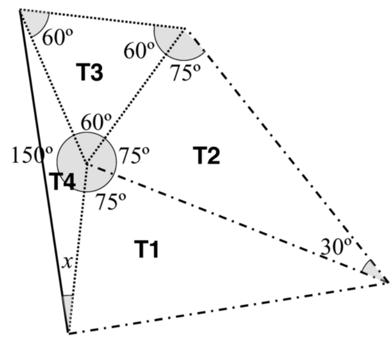
46 Nivel II CP XXIII

En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo x?



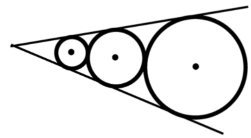
A) 18º **B)** 26º **C)** 15º
D) 24º **E)** 20º

(C) El triángulo T2 es isósceles, sus ángulos iguales miden:
(180º – 30º) : 2 = 75º.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide:
360º – (60º + 75º + 75º) = 150º.
Por ello, el ángulo x mide: (180º – 150º) : 2 = 15º.



47 Nivel II CP XXIII

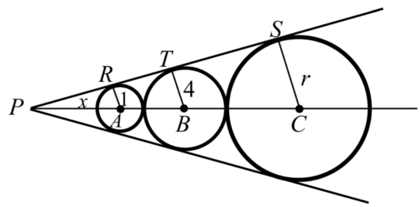
En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



A) 10 **B)** 6 **C)** 15

D) 20 **E)** 16

(E) Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos *PAR*, *PBT* y *PCS* son semejantes.



Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud *x* de *PA* y luego el radio *r* del sombrero mayor.

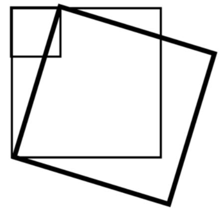
PAR y *PBT* semejantes: $\frac{AR}{BT} = \frac{PA}{PB} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1+x}{6+x} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

PAR y *PCS* semejantes: $\frac{AR}{CS} = \frac{PA}{PC} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1+\frac{2}{3}}{r+10+\frac{2}{3}} \rightarrow r = 16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

48 Nivel II CP XXIV

Si el cuadrado menor tiene área A y el cuadrado mediano tiene área B, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?



A) $(A+B)^2$ **B)** A^2+B^2 **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

D) $A+2B$ **E)** $A+B$

(E) El lado del cuadrado pequeño debe medir $\sqrt{A}$ y el del cuadrado mediano $\sqrt{B}$. Llamamos x al lado del cuadrado grande y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por los lados de los tres cuadrados obtenemos que: $x^2=(\sqrt{A})^2+(\sqrt{B})^2=A+B$.

El área del cuadrado grande es $A + B$.

49 Nivel II CP XXIV

Si a, b, c, d, e, son enteros positivos y $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

A) $a + 2c = b$ **B)** $a + b + c + d = e$ **C)** $a + c = b + d$

D) $a \cdot c = b \cdot d$ **E)** $b = d - e$

(A) Un problema muy interesante para manejar las propiedades de las potencias. Vamos a expresar ambos miembros usando únicamente potencias de base 2 y 3. Es sencillo porque $4 = 2^2$ y $6 = 2 \cdot 3$.

$2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$

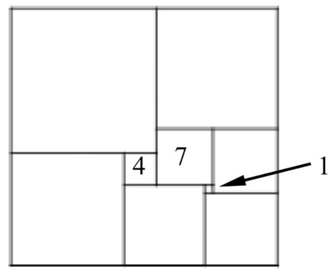
$2^a \cdot 3^b \cdot 2^{2c} \cdot 2^d \cdot 3^d = 2^e \cdot 3^e$

$2^{a+2c+d} \cdot 3^{b+d} = 2^e \cdot 3^e$

Por tanto, igualando los exponentes correspondientes a las bases 2 y 3: $\left.\begin{matrix} a+2c+d=e \\ b+d=e \end{matrix}\right\}$ y si restamos la primera igualdad menos la segunda, ya podemos contestar: $a + 2c - b = 0$, es decir, $a + 2c = b$.

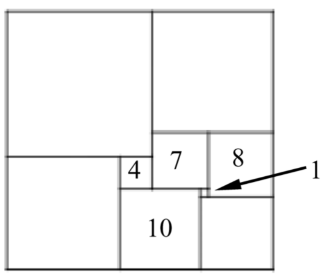
50 Nivel II CP XXV

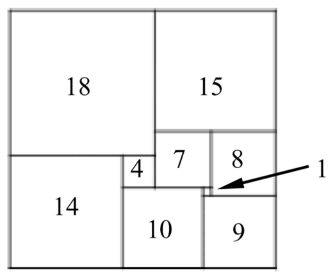
Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m^2, tiene la sala?



A) 1024 **B)** 1122 **C)** 1023
D) 1088 **E)** 1056

(E) Tratemos de averiguar los lados de las alfombras cuadradas. Solo tenemos que sumar y restar y avanzar sin prisas. Las dos primeras alfombras que podemos medir son las de lados 8 m y 10 m. Luego, poco a poco, hasta completar el problema.





El área de la sala rectangular es $32 \times 33 = 1056$ m^2.

Soluciones - Nivel III

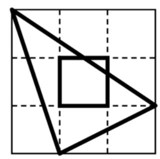
1 Nivel III CP I

Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

(C) Los 9 primeros números ocuparán 9 lugares; los 99 primeros números ocuparían $9 + 2 \cdot 90 = 189$ lugares.
Así pues, quedan $1000 - 189 = 811$ lugares que serán ocupadas por números de tres cifras, habiendo pues $811 : 3 = 270$ números completos y la primera cifra del número que ocupe el 271º lugar. Como el primer número de tres cifras es 100, el 270º es el 369 y la primera cifra del siguiente, 370, es 3.

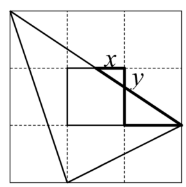
2 Nivel III CP I



Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

D) $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$



(C) Llamando x e y a los catetos horizontal y vertical respectivamente del triángulo pequeño que queda fuera de la zona común, podemos escribir, por semejanza de triángulos, que $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $\frac{1-y}{1} = \frac{2}{3}$, de donde obtenemos $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$ y el área del triángulo pequeño será $\frac{1}{12}$ con lo que el área de la zona común será $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

3 Nivel III CP III

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

A) 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

(B) Al ser el número de gatos un cuadrado perfecto y un cubo perfecto, debe ser una potencia sexta y las únicas potencias sextas con 6 cifras son 7^6, 8^6 y 9^6 pues 10^6 tiene 7 cifras y 6^6 solamente 5, mientras que 7^6 ya tiene 6.

Por otra parte, al restar 6 debemos obtener un número primo y $9^6 - 6$ no es primo por ser múltiplo de 3 y $8^6 - 6$ tampoco es primo por ser par, luego el número de gatos de Gatolandia es 7^6, es decir, 117649.

4 Nivel III CP III

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

(D) El vértice más alejado al 6 será el vértice común de las 3 caras que no contienen al 6, es decir de las {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7} y {3, 4, 5, 8}, es decir el 5.

5 Nivel III CP IV

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14 789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

A) 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

PRIMERA SOLUCIÓN

(B) Si el número es x tenemos que, al formar el número $1x1$, ha aumentado x en $14\,789$, es decir: $10x + 1 + 10^n - x = 14\,789$ siendo n el número de cifras de x. Así pues, $9x + 10^n = 14\,789$, de donde $10^n = 10000$ y $9x = 4788$ con lo que $x = 532$ y la suma de sus cifras es 10.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(B) Si el número También podemos escribir la resta 1____1 – ____ = 14789 y empezar a rellenar desde las unidades. La unidad del sustraendo tiene que ser un 2 para que la resta sea 9, por tanto, las decenas del minuendo también es 2 ya que es el mismo número sin añadir los unos (al principio y al final). Completando de esta forma la resta conseguimos el número 532.

6 Nivel III CP IV

Si $n = 1+3+5+...+999$ y $m = 2+4+6+...+1000$, $m-n$ es igual a:

A) 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

(A) Escribimos $m - n = (2 + 4 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + \ldots + 999)$, agrupándolo de otra forma tenemos,
$m - n = (2 - 1) + (4 - 3) + \ldots + (1000 - 999) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (quinientas veces), así que $m - n = 500$.

7 Nivel III CP V

Llenamos una cuadrícula de p filas y q columnas con todos los enteros desde 1 a pq. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p + q$.

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(A) La primera fila la forman los enteros desde 1 hasta q; la segunda desde $q + 1$ hasta $2q$; la tercera desde $2q + 1$ a $3q$; la quinta desde $4q + 1$ a $5q$ y la última, la p-ésima, desde $(p-1)q$ a pq.
Así pues sabemos que:

$$\begin{cases} 2q+1 \le 20 \le 3q \\ 4q+1 \le 41 \le 5q \\ (p-1)q \le 103 \le pq \end{cases} \quad \text{y nos piden } p+q.$$

De la primera información, tenemos que $2q \le 19$ y $20 \le 3q$, así que $q \le 9$ y $q \ge 7$ por lo que q puede ser 7, 8 o 9. De la segunda, obtenemos $4q \le 40$ y $41 \le 5q$, por lo que $q \le 10$ y $q \ge 9$ (recordar que q es entero). Así pues, $q = 9$ o 10, que junto a la información anterior nos asegura que $q = 9$, con lo que la última información se reduce a $9(p-1) \le 103 \le 9p$, de donde $p \le 12$ y $p \ge 12$, es decir, $p = 12$ y $p + q = 21$.

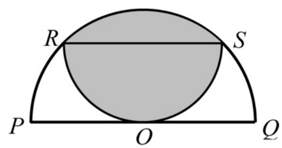
8 Nivel III CP V

El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

A) 1001^2 **B)** 2002^2 **C)** $2002 \cdot 1001$ **D)** $1001 \cdot 2001$ **E)** Nada de lo anterior

(D) Agrupando cada diferencia de cuadrados en producto de suma por diferencia, tenemos que, al ser la diferencia 1, la expresión dada es igual a:
$(2001 + 2000) \cdot (2001 - 2000) + (1999 + 1998) \cdot (1999 - 19998) + ... +$
$+ (1 + 0) \cdot (1 - 0) = 2001 + 2000 + 1999 + \ldots + 3 + 2 + 1.$
Esta suma es la de todos los enteros que van desde el 1 hasta el 2001, es decir, $S = \dfrac{1+2001}{2} \cdot 2001 = 1001 \cdot 2001$.

9 Nivel III CP V

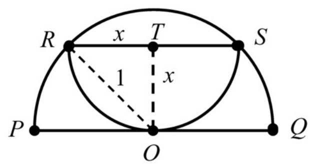


En la figura adjunta, las curvas *PRSQ* y *ROS* son semicircunferencias y *RS* es paralela a *PQ*. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en m², de la región sombreada?

A) $\dfrac{\pi - 1}{2}$ **B)** $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ **C)** $\dfrac{\pi}{4}$

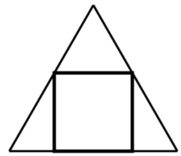
D) 1 **E)** $\dfrac{\pi}{2} - 1$

(A) Como *ROS* es una semicircunferencia, si $OT = x$, $RT = x$ por lo que $1 = 2x^2$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y el ángulo bajo el que se ve el segmento de cuerda *RS* es 90º por lo que el área del segmento circular será la del sector circular menos el triángulo *ORS*, donde el sector circular es de 90º por tanto, un cuarto de círculo de radio 1 y el triángulo es rectángulo de catetos 1. Así que el segmento tiene un área de $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi - 2}{4}$. Como el área del semicírculo *RSO* es $\dfrac{1}{2}\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, el resultado pedido será $\dfrac{\pi - 2}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi - 2}{4} = \dfrac{\pi - 1}{2}$ m².



10 Nivel III CP V

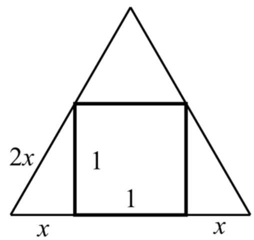
Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



A) 2 **B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

(E) En la figura observamos que $(2x)^2 = 1^2 + x^2$, por lo que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la longitud del lado del triángulo es $1 + 2x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.



11 Nivel III CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

(B) Podemos estudiar jarra por jarra viendo en cuál puede estar el chocolate (el enunciado dice que el chocolate está en un único recipiente). Teniendo en cuenta que no hay tres jarras con el mismo líquido, deducimos que hay una de chocolate, dos de café y dos de leche. Las opciones son las siguientes:

A) Si hay 950 g de chocolate, la cantidad de café, el doble, será 1900 g y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

B) Si hay 750 g de chocolate, de café habría 1500 g que serían las tazas A + C. La leche estaría en las tazas D + E. Sigamos con el proceso para asegurarnos de que no hay más respuestas posibles.

C) Si hay 550 g de chocolate, el café sería 1100 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

D) Si hay 475 g de chocolate, el café sería 950 g (taza A), pero esto obligaría a que en las tres tazas restantes tendría que haber leche y el enunciado no lo permite.

E) Si hay 325 g de chocolate, el café sería 650 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

12 Nivel III CP VI

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

v	24	w
18	x	y
25	z	21

A) 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

(D) Escribamos los números que faltan en función de la z, por ejemplo.

C1 = F3: $v + 18 + 25 = 25 + z + 21 \Rightarrow v = z + 3$
C2 = F3: $24 + x + z = 25 + z + 21 \Rightarrow x = 22$
F2 = F3: $18 + 22 + y = 25 + z + 21 \rightarrow y = z + 6$
C2 = C3: $24 + 22 + z = w + z + 6 + 21 \rightarrow w = 19$

z+3	24	19
18	22	z+6
25	z	21

Y ya sabemos que la diagonal suma $25 + 22 + 19 = 66$ y podemos completar el cuadrado mágico.

23	24	19
18	22	26
25	20	21

13 Nivel III CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

A) $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

(E) Estudiemos todos los casos favorables suponiendo que debe coincidir el primer dado con la suma de los otros dos:
Si en el primero sale 1 [probabilidad 1/6], no se puede cumplir lo pedido [este caso es desfavorable].
Si sale un 2 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 1) que tiene probabilidad 1/36.
Si sale un 3 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 2) o (2, 1) que tiene probabilidad 2/36.
Si sale un 4 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 3), (2, 2) o (3, 1) que tiene probabilidad 3/36.
Y siguiendo con el resto llegaríamos a una probabilidad de

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1+2+3+4+5}{36}\right)=\frac{15}{6\cdot 36}=\frac{5}{72}$$

y este resultado hay que multiplicarlo por 3 ya que el dado suma podría ser el primero, el segundo o el tercero, y la respuesta es entonces: $\frac{3\times 5}{72}=\frac{5}{24}$.

14 Nivel III CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

A) 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

(B) Si los tres números consecutivos son, $x-1, x, x+1$, entonces el enunciado se traduce en esta ecuación: $(x-1)\cdot x\cdot(x+1) == 8\cdot(x-1+x+x+1)$ y al operar obtenemos:

$x^3 - x = 24x \Rightarrow x^3 = 25x$ y dividiendo los dos miembros por x (obsérvese que $x \neq 0$ porque si x fuese nulo, los números serían –1, 0, 1 que no cumplen lo pedido), tenemos que $x^2 = 25$ con dos posibles soluciones $x = +5$ y $x = -5$. En el primer caso hablaríamos de 4, 5, 6, y en el segundo de –6, –5, –4 que elevados al cuadrado y sumados dan el mismo resultado: $4^2 + 5^2 + 6^2 = (-6)^2 + (-5)^2 + (-4)^2 = 77$.

15 Nivel III CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

A) 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

(D) Si a cada uno le tengo que dar por lo menos tres caramelos, esto hace un total de nueve caramelos (tres para cada uno) y, por tanto, ya solo me quedan tres caramelos para repartir. Veamos de cuántas formas puedo repartir tres caramelos entre tres personas. Con cuidado y siguiendo un orden, encontramos las siguientes maneras de hacer el reparto:

A: (3 +)	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3
B: (3 +)	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
C: (3 +)	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

Hay diez maneras.

16 Nivel III CP VIII

El número de dos cifras [ab] es divisible por 7. Representamos por [ba] el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: [ba] + a, ¿cuáles son también divisibles por 7?

A) Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III
D) Los tres **E)** Solamente I y III

(D) Interesante problema que parece imposible de atacar pero… ya vas a ver. El primer paso para resolver un problema siempre es el mismo: ponerse a resolverlo. Recuerda que [ab] = $10a + b$. El dato del problema es que el número [ab] es divisible por 7 (o sea, es múltiplo de 7), es decir que $10a + b = 7p$, donde p es un número natural.
Fíjate que en $10a + b = 7p$ podemos despejar b; $b = 7p - 10a$. Escribamos los tres números en función de a y p:

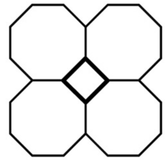
I: $5b + a = 5(7p - 10a) + a = 35p - 50a + a = 35p - 49a = 7(5p - 7a)$ ¡múltiplo de 7!

II: $3a + b = 3a + 7p - 10a = 7p - 7a = 7(p - a)$ ¡múltiplo de 7!

III: $(ba) + a = 10b + a + a = 10b + 2a = 10(7p - 10a) + 2a = 70p - 100a + 2a =$
$= 70p - 98a = 7(10p - 14a)$ ¡múltiplo de 7!

Hay que reconocerlo, bonito problema.
Los tres nuevos números son también divisibles por 7.

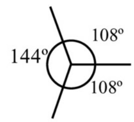
17 Nivel III CP IX



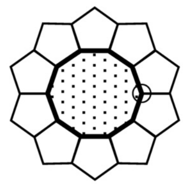
Rodeamos un polígono regular de m lados por m polígonos regulares de n lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale n si $m = 10$?

A) 5 **B)** 6 **C)** 14

D) 20 **E)** 26



(A) En geometría, cuando parece que no tenemos ningún dato, hay que fijarse en los ángulos, que son los que determinan las formas. En cada vértice del polígono de m lados coinciden dos polígonos iguales de n lados. Los tres ángulos que se forman en el vértice deben sumar 360º. Sumémoslos: Los ángulos interiores del polígono regular de 10 lados valen 144º (pues los ángulos centrales miden 36º) Con esto obtenemos la medida de los ángulos del polígono de n lados: $\dfrac{360º-144º}{2} = 108º$



Por tanto, el ángulo central del polígono de n lados mide 72º, se trata de un pentágono.

18 Nivel III CP IX

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

A) Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

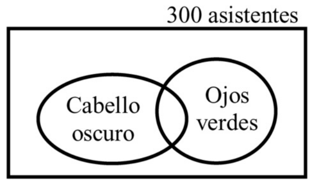
(D) Podríamos probar elevando al cuadrado todos los números entre 10 y 31 (32^2 ya tiene 4 cifras) pero no es necesario trabajar tanto.
Observa que los cuadrados perfectos sólo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9 ya que:
$0^2 = \mathbf{0}$, $1^2 = \mathbf{1}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $3^2 = \mathbf{9}$, $4^2 = 1\mathbf{6}$, $5^2 = 2\mathbf{5}$, $6^2 = 3\mathbf{6}$, $7^2 = 4\mathbf{9}$, $8^2 = 6\mathbf{4}$ y $9^2 = 8\mathbf{1}$.
De modo que sólo hay que buscar capicúas que sean cuadrados perfectos entre los siguientes números:
101 – 111 – 121 … 191 Probamos con 11 y 19 ; $\mathbf{11^2 = 121}$ y $19^2 = 361$.
404 – 414 – 424 … 494 Probamos con 22 y 28; $\mathbf{22^2 = 484}$ y 28^2 se pasa seguro.
505 – 515 – 525 … 595 Probamos con 25; $25^2 = 625$, nada.
606 – 616 – 626 … 696 Probamos con 24 y 26; $24^2 = 576$ y $\mathbf{26^2 = 676}$.
909 – 919 – 929 … 999 Probamos con 23 y 27; 23^2 es muy pequeño y $27^2 = 729$.
Así que hemos encontrado tres cuadrados perfectos entre los capicúas de tres cifras.

19 Nivel III CP X

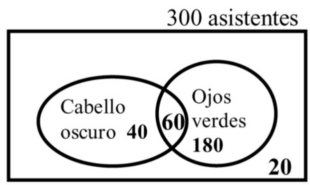
En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

A) $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

(A) En este tipo de problemas en el que intervienen proporciones o porcentajes es muy útil trabajar con cantidades concretas y luego, al final, hallar la proporción o el porcentaje pedido. En este problema es acertado suponer que asisten 300 personas a la reunión ya que es múltiplo de 3 y de 100. Utilizaremos unos sencillos diagramas. Ya solo falta ir rellenando las regiones con su cantidad correspondiente.



Es importante darse cuenta con qué dato debemos empezar: el 20% (20% de 300, es decir, 60 personas) tienen ojos verdes y cabello oscuro. Pondremos 60 en la intersección. Como el 80% (240) tienen cabello oscuro, debemos colocar 180 en la parte que queda, pues ya hay 60 con cabello oscuro. Así, poco a poco, hasta llegar a rellenar el diagrama.

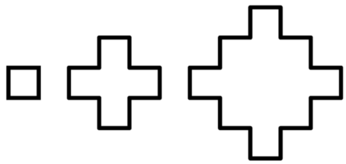


Al final quedan 20 asistentes (300 – 40 – 60 – 180) que ni tienen ojos verdes ni cabello oscuro, lo que hace una proporción de $\frac{20}{300} = \frac{1}{15}$.

20 Nivel III CP X

En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm^2 de área?

A) 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm **D)** 40 cm **E)** 44 cm



(E) Estudiemos cómo van variando el área y el perímetro de los cuatro primeros *crucigramas* para intentar encontrar alguna relación en su formación:

Crucigrama	1º	2º	3º	4º
Área (cm^2)	1	5	13	25
Perímetro (cm)	4	12	20	28

Y ya se ve que el área va aumentando en múltiplos de 4, es decir, más 4, más 8, más 12, etc. Y el perímetro va aumentando en 8 a cada paso. Podemos pues continuar la serie sin necesidad de dibujar los *crucigramas*:

Crucigrama	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Área (cm^2)	1	5	13	25	41	61
Perímetro (cm)	4	12	20	28	36	44

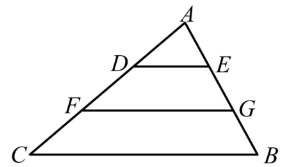
El perímetro del *crucigrama* de área 61 cm^2 es 44 cm.

Si nos hubieran pedido estudiar *crucigramas* mucho mayores, tendríamos que encontrar su ley de formación. El *crucigrama* que ocupa el lugar n tiene:

Área: $A_n = (n-1)^2 + n^2$ Perímetro: $P_n = 8n - 4$

21 Nivel III CP X

En el triángulo ABC de la figura, de área 90 cm^2, los puntos E y G dividen al lado AB en tres partes iguales y las rectas DE y FG son paralelas a BC. ¿Cuál es, en cm^2, el área del trapecio $DEGF$?



A) 20 **B)** 25 **C)** 30

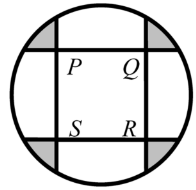
D) 36 **E)** 45

(C) Al ser los segmentos FG y DE paralelos a CB, los triángulos ABC, AGF, AED son semejantes. Además conocemos las razones de semejanza pues $AE = \frac{1}{3}AB$ y $AG = \frac{2}{3}AB$. Por tanto, podemos comparar sus áreas: $\mathrm{A}_{AGF} = \frac{4}{9}\mathrm{A}_{ABC} = 40$ cm^2 y $\mathrm{A}_{AED} = \frac{1}{9}\mathrm{A}_{ABC} = 10$ cm^2.

Y ya podemos contestar, el área del trapecio $DEGF$ mide 40 – 10 = 30 cm^2.

22 Nivel III CP XI

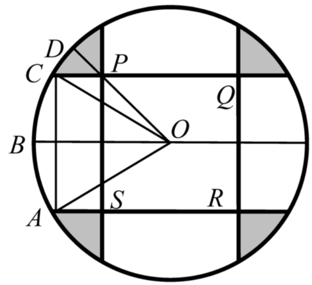
El cuadrado *PQRS* de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m^2, el área de la región sombreada?



A) $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

D) $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

(E) Vamos a calcular el área de la figura sombreada que queda entre los puntos *C, D* y *P* y después multiplicaremos por 8 el resultado obtenido.



Observa que el área que intentamos calcular es el área del sector circular *COD* menos el área del triángulo *CPO*.

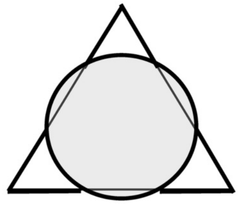
Para calcular el ángulo $C\hat{O}D$ observa que el triángulo *ACO* es equilátero y por tanto, el ángulo $C\hat{O}D$ = 45º – 30º = 15º y el área del sector circular $A_{COD} = \frac{15\cdot\pi}{360} = \frac{\pi}{24}$ m^2.

Para calcular el área del triángulo *CPO* tratemos de calcular la medida de *CP* ya que su altura correspondiente es $\frac{1}{2}$ m. Como $CP+\frac{1}{2}$ es la altura del triángulo equilátero *ACO* cuyo lado es 1 m, tenemos que $CP = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ m, y por tanto el área del triángulo *CPO* es $A_{CPO}\,\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}$ m^2.

Juntando todo lo anterior tenemos que el área buscada, en m^2, es $8\cdot\left(\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right) = \frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$ m^2.

23 Nivel III CP XI

Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?



A) 2π **B)** $6 + \pi$ **C)** 9

D) 3π **E)** $9 + 2\pi$

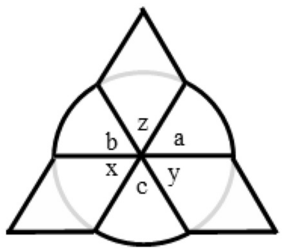
(B) Como el círculo está centrado en el triángulo equilátero, los ángulos *a*, *b*, *c* son iguales. Y como los otros ángulos *x*, *y*, *z* son opuestos por el vértice a los anteriores, concluimos que esos seis ángulos son iguales y por tanto miden 60º cada uno.

La parte de circunferencia que se ve equivale a 180º, es decir la mitad de la circunferencia completa: $\dfrac{2\pi\, r}{2} = \pi \cdot 1 = \pi$ cm.

La parte que se oculta del triángulo es 1 cm por cada lado ya que los triangulitos interiores son equiláteros al ser isósceles y tener un ángulo de 60º.

Por tanto, de cada lado se ven 2 cm.

Así pues el borde de la figura mide $6 + \pi$ cm.



24 Nivel III CP XII

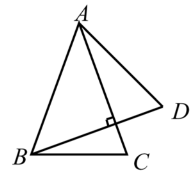
Con 10! (diez factorial) representamos al producto 10 · 9 · 8 · ... · 2 · 1 (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

A) 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

(D) $10! = 2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 7\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 2^8$. Si descomponemos un cubo perfecto en producto de primos, todos los primos estarán elevados a un múltiplo de tres. Así pues, para obtener el menor cubo perfecto debemos multiplicar 10! por $7^2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2 = 4410$.

25 Nivel III CP XII

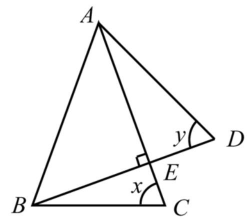
Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$. Si BD es perpendicular a AC, la suma de los ángulos $\hat{C} + \hat{D}$ es igual a:



A) 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

E) No tenemos datos suficientes para determinarla

(D) En el triángulo ABD se cumple que $A\hat{B}D = 180º - 2y$.
Los ángulos del triángulo EBC miden: $E = 90º$, $C = x$, $B = x - (180º - 2y)$ y su suma es 180º:
$90º + x + x - (180º - 2y) = 180º \Rightarrow 2x + 2y = 270º$.
Por tanto, $x + y = 135º$.

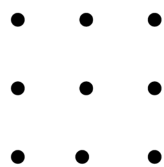


26 Nivel III CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?

A) $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$

D) $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$



(B) Solamente hay 8 casos en los que los tres puntos están alineados (las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales) y hay $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ formas de escoger tres puntos de nueve, luego la probabilidad buscada es $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

27 Nivel III CP XIII

Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

A) 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

(D) Resumamos en una tabla los datos del problema:

	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)	Espacio (km)
Pedro	t	v	$v \cdot t$
Alicia	$t + 1$	$v + 5$	$(v + 5)\cdot(t + 1)$
Luisa	$t + 2$	$v + 10$	$(v + 10)\cdot(t + 2)$

Como Alicia condujo 70 km más que Pedro, podemos escribir:

$$(v+5)(t+1) = vt + 70 \Rightarrow 5t + v = 65$$

Luisa recorrió:

$$(v+10)(t+2) = vt + 10t + 2v + 20 = vt + 2(5t + v) + 20 = vt + 2 \cdot 65 + 20 = vt + 150$$

Es decir, 150 km más que los recorridos por Pedro.

28 Nivel III CP XIV

En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es x?
[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]

				21
	16			
		27		
				x

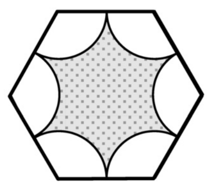
A) 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

(B) Comencemos por la diagonal: 16 y 27 son dos términos consecutivos de una progresión aritmética luego la razón es $27 - 16 = 11$ y eso nos permite rellenar toda la diagonal: $16 - 11 = 5$, $27 + 11 = 38$ y $38 + 11 = 49$.
A continuación nos fijamos en la última columna de la que tenemos el primer y el quinto término de la progresión: Como $49 = 21 + 4d$ obtenemos que la diferencia es 7 y por tanto $x = 49 - 7 = 42$.

5				21
	16			
		27		
			38	x
				49

29 Nivel III CP XIV

Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en dm^2, el área de la estrella central?

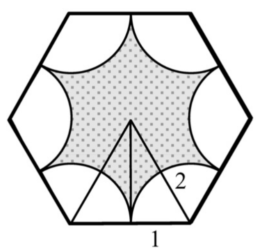


A) $3\sqrt{3} - \pi$ **B)** $6\sqrt{3} - 2\pi$ **C)** $2\sqrt{6} - \pi$

D) $3(\sqrt{18} - \pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3} - \pi)$

(B) Como los ángulos de un hexágono suman 720º, los sectores circulares blancos forman dos círculos de radio 1 dm. Así pues, el área buscada es el área del hexágono regular de 2 dm de lado y $\sqrt{3}$ dm de apotema menos el área de dos círculos de radio 1 dm:

$$6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi \text{ dm}^2.$$



30 Nivel III CP XV

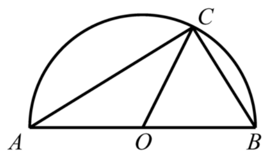
Si n es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que n?

A) $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** n^2+1 **D)** n^2+n **E)** n^2+2n+1

(B) El número n es el cuadrado de $\sqrt{n}$ que es un número entero. El siguiente cuadrado perfecto será el cuadrado de $\sqrt{n}+1$, esto es $(\sqrt{n}+1)^2=n+2\sqrt{n}+1$.

31 Nivel III CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro O y radio 1 cm. Si C es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?



A) El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.

B) El triángulo AOC es isósceles.

C) El área del triángulo ABC es menor o igual que 1 cm^2.

D) El área del triángulo AOC es igual a la del triángulo OBC.

E) $AO^2+OB^2=AC^2+BC^2$.

(E) A) Es verdadera pues el ángulo $A\hat{C}B$ abarca media circunferencia.
B) Es verdadera pues OA y OC son radios.
C) Es verdadera pues la base del triángulo es 2 cm y la altura es menor o igual que 1 cm.
D) Es verdadera pues las bases miden 1 cm y las alturas coinciden.
E) Por descarte, debe ser falsa, comprobémoslo:

Como el triángulo ABC es rectángulo en C, sabemos que $AB^2=AC^2+BC^2$ y, sustituyendo $AB = AO + OB$, vemos que:

$$AB^2=(AO+OB)^2=AO^2+2\cdot AO\cdot OB+OB^2=AC^2+BC^2.$$

Como $2\cdot AO\cdot OB = 2$, obtenemos la igualdad $AO^2+OB^2+2=AC^2+BC^2$.

32 Nivel III CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

A) Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
D) Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

(B) Vamos a encontrar los nombres de las instrumentistas. El quid de estos problemas es saber por dónde empezar.
Analizando (b) y (c) deducimos que Ana es la clarinetista y, por tanto (a), tiene pecas.
Observando ahora (b) y (d) deducimos que Clara es la violinista.
Observando ahora (d) deducimos que Daniela es la guitarrista y, por tanto (c), no practica natación.
Por tanto, Bárbara es la flautista.
La única afirmación cierta es que Bárbara toca la flauta.

33 Nivel III CP XVI

El resto de dividir 7^{25}entre 9 es:

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

(D) Veamos los restos de las primeras potencias de 7 con respecto a 9:
$7^1 = 7 = 9 \cdot 0 + 7 \rightarrow 7$, $7^2 = 49 = 9 \cdot 5 + 4 \rightarrow 4$, $7^3 = 343 = 9 \cdot 38 + 1 \rightarrow 1$.
Al dividir 343 entre 9 da resto 1 y, así, $7^{24} = 343^8$ entre 9 también da resto 1. Luego, 7^{25} entre 9 da resto 7.

34 Nivel III CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

A) $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

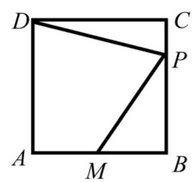
(A) Número de casos posibles: Debemos escoger cuatro de entre los diez empleados para trabajar el domingo, así que hay $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ posibilidades.

Número de casos favorables: Dentro de esas 210 posibilidades, Rubén aparecerá, con Puri o sin ella, $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ veces, y Puri, sin Rubén, lo hará $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ veces.

Por lo tanto, la probabilidad que tiene Rubén de trabajar el domingo es
$\frac{84+56}{210}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$.

35 Nivel III CP XVII

En el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm, M es el punto medio del lado AB y P es un punto variable del lado BC. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de $DP + PM$?

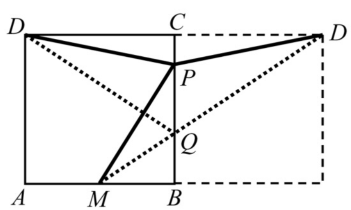


A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

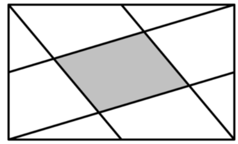
D) $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

(A) Si consideramos el punto D', simétrico de D respecto de la recta BC, tendremos que $DP + PM = D'P + PM \geq D'M$ para cualquier punto P del segmento BC.
Por lo tanto, la mínima suma de distancias se obtiene con el punto Q con el que

$$DQ+QM = D'M = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \text{ cm.}$$



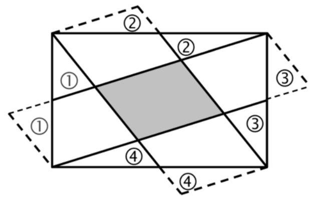
36 Nivel III CP XVIII



En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm^2, la del romboide, en cm^2, es:

A) 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 10

(D) Añadiendo algunos segmentos a la figura se observa que los triángulos marcados con el mismo número son iguales por simetría, con lo que tenemos que el rectángulo dado tiene igual área que 5 romboides como el sombreado y, por lo tanto, su área mide 60 : 5 = 12 cm^2.



37 Nivel III CP XVIII

¿Cuántos enteros n, con $1 \le n \le 100$, verifican que n^n es un cuadrado perfecto?

A) 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

(E) Si n es par, n^n es cuadrado perfecto pues, al ser $n = 2k$, $n^n = n^{2k} = (n^k)^2$. Por lo tanto, ya tenemos 50 números enteros (los pares 2, 4, 6,..., 100) que verifican la condición. Por otra parte, si n es impar podemos escribir $n = 2k + 1$ y $n^n = n^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, lo que indica que n^n será cuadrado perfecto si y sólo si lo es n. Veamos, por lo tanto, qué cuadrados perfectos impares hay que cumplan $1 \le n \le 100$. Son 5: 1, 9, 25, 49, 81.

En definitiva, hay 50 + 5 = 55 números que verifican las condiciones exigidas.

38 Nivel III CP XVIII

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

A) –1007 **B)** –1005 **C)** – 670 **D)** 0 **E)** 1008

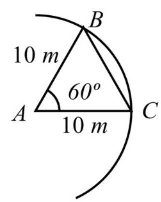
(C) La sucesión es: 1, –1, –1, 1, –1, –1,... Es decir, se repite la secuencia 1, –1, –1 continuamente. Así, los unos ocupan los lugares de la forma $3k + 1$ (1º, 4º, 7º,…). Hasta $2013 = 3 \cdot 671$, tendremos 671 unos y el doble de unos negativos, con lo que la suma de todos los términos será – 671. Si le añadimos el 1 de la posición 2014, obtendremos – 670.

39 Nivel III CP XIX

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

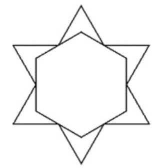
A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

(B) Para que Bea esté a la misma distancia de Ali que de Carolina, el triángulo formado entre ellas tiene que ser equilátero y, por tanto, con todos sus ángulos 60º. En consecuencia, para que Bea esté más cerca de Carolina que de Ali, el ángulo $B\hat{A}C$ tiene que ser menor de 60º. Además, hay que tener en cuenta que Bea puede moverse a cada uno de los dos lados del segmento AC. Habiendo observado esto y aplicando la regla de Laplace, encontramos la probabilidad: $P = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.



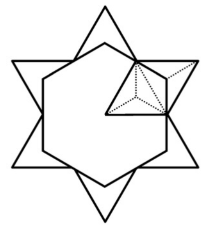
40 Nivel III CP XIX

El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm^2.
El área, en cm^2, de la estrella es:



A) 15 **B)** 18 **C)** 20
D) 21 **E)** 24

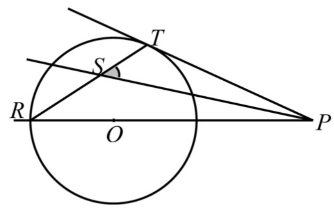
(B) Dibujando dos apotemas, vemos en cada punta de la estrella un rombo que queda dividido en una cabeza de flecha y una cometa. Como se ve en la figura, el área de la cabeza de flecha es la mitad del área de la cometa, luego el área de la estrella es vez y media la del hexágono.



41 Nivel III CP XX

Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro O y otra tangente en T, como muestra la figura.

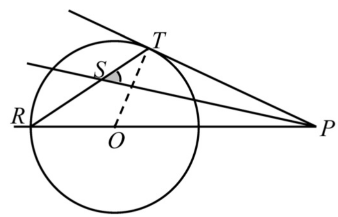
La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento RT en S. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$?



A) 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º
D) 45º **E)** 52,5º

(D) La tangencia en T nos sugiere el trazado del radio OT. De este modo $P\hat{T}O = 90º$ y, si llamamos α al ángulo $O\hat{P}T$: $T\hat{O}P = 90º - \alpha$

$R\hat{O}T = 180º - (90º - \alpha) = 90º + \alpha$.



Como el triángulo OTR es isósceles, se tiene además que $O\hat{T}R = \dfrac{180º - R\hat{O}T}{2} = \dfrac{90º - \alpha}{2}$ y, por tanto: $P\hat{T}S = P\hat{T}O + O\hat{T}R = 135º - \dfrac{\alpha}{2}$.

Como resultado, $T\hat{S}P = 180º - P\hat{T}S - \dfrac{O\hat{P}T}{2} = 45º$.

42 Nivel III CP XX

Si los cuatro enteros C, D, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

A) Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5
D) Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

(E) Si C y D son primos, no pueden ser ambos impares ya que entonces $C + D$ no sería primo al ser par. Así que uno de los dos es el 2 y, como $C - D$ no es negativo al ser primo, deducimos que $D = 2$. Por tanto, los números primos de los que hablamos son, respectivamente: C, 2, $C+2$, $C - 2$. Dado que la única terna de primos impares consecutivos es la 3, 5, 7, resulta que $C = 5$ y los cuatro enteros dados son 5, 2, 7 y 3 que suman 17, siendo un número primo también.

43 Nivel III CP XXI

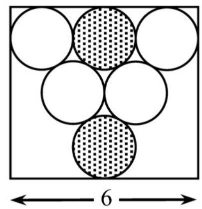
Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras $PQRST$. Si el número de tres cifras PQR es divisible por 4, el QRS es divisible por 5 y el RST es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra P?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

(A) Como QRS es múltiplo de 5, S necesariamente es 5. Al ser PQR múltiplo de 4, QR debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, RST es múltiplo de 3. Como S es 5 y R únicamente puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos $25T$, que solo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos $45T$, que solo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

44 Nivel III CP XXI

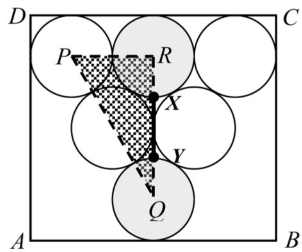
En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?



A) $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$

D) $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

(C) Observa la primera fila de circunferencias. Como AB = 6 cm y dicha longitud es tres veces el diámetro de cada circunferencia, los radios miden todos r = 1 cm. En el triángulo rectángulo PRQ, el cateto PR mide $2r$ = 2 cm y la hipotenusa PQ mide $4r$ = 4 cm. Así, por el teorema de Pitágoras, se obtiene $RQ = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm.



La distancia que se pide es la del segmento $XY = RQ - 2r = 2\sqrt{3} - 2 = 2\cdot(\sqrt{3}-1)$ cm.

45 Nivel III CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

A) 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

(D) Dado que 2018 no es bisiesto, la pregunta se puede cambiar por "¿Cuántos números del 1 al 365 no son múltiplos de 3, 4 o 5?" Para dar la respuesta calcularemos cuántos números del 1 al 365 sí son múltiplos de 3, 4 o 5. Tenemos 121 múltiplos de 3, 91 de 4 y 73 de 5. Pero cuidado, ¡algunos múltiplos son comunes! Debemos descontar los múltiplos que son comunes a pares y que hemos contado dos veces: de 3 y 4 son los de 12 que hay 30, de 3 y 5 los de 15 que hay 24, y de 4 y 5 los de 20 que hay 18. ¡Sin embargo queda un detalle! Hemos contado los múltiplos comunes a 3, 4 y 5 (los de 60 que son 6) por triplicado, pero también los hemos descontado tres veces, por lo que hay que volver a contarlos.
En definitiva, la cantidad de múltiplos de 3, 4 o 5 entre el 1 y 365 es:
$121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 18 + 6 = 219$.
María no recibe llamadas de sus nietos $365 - 219 = 146$ días.

46 Nivel III CP XXII

Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

A) 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

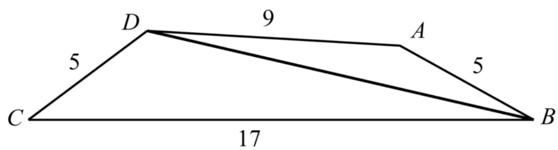
(A) Si a es el número de puntos azules, el número de puntos verdes es $2018 - a$. La fracción que corresponde a cada punto verde es $\dfrac{a}{2018-a}$, mientras que la que corresponde a cada punto azul es $\dfrac{2018-a}{a}$.

La suma de todas las fracciones es: $(2018-a)\cdot\dfrac{a}{2018-a}+a\cdot\dfrac{2018-a}{a}=2018$.

47 Nivel III CP XXIII

En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide BD si sabemos que es un entero?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



(C) Por ser lado de DBA, DB debe estar estrictamente entre $9 - 5 = 4$ y $9 + 5 = 14$. Por ser lado de CBD, DB debe estar (también estrictamente) entre $17 - 5 = 12$ y $17 + 5 = 22$, así que $DB = 13$.

48 Nivel III CP XXIII

Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

(A) Operando las dos igualdades se obtienen dos ecuaciones:

$xy+2x+2y+4=60$ $\qquad$ $xy+3x+3y+9=40$

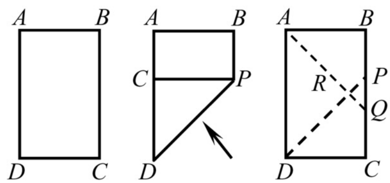
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x+y+5=-20$, es decir $x+y=-25$.

Por último, manipulando la expresión que nos piden, deducimos:

$(x+5)\cdot(y+5)=xy+5x+5y+25=(xy+2x+2y+4)+3(x+y)+21=60+3(-25)+21=6.$

49 Nivel III CP XXIV

Una hoja rectangular $ABCD$ con AB = 5 cm y AD = 8 cm, se dobla para que el borde CD caiga sobre el borde AD, formándose así el doblez PD. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que AB caiga sobre AD, formándose ahora el doblez AQ. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto R, calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero $DRQC$.



A) 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

(D) Por cómo se realizan los dobleces podemos deducir que el segmento BQ mide 5 cm, ya que tiene que medir lo mismo que AB. Esto mismo sucede con el segmento PC, de manera que $PQ = PC + BQ = 5 + 5 - 8 = 2$ cm pues es el trozo que contamos dos veces si sumamos PC y BQ. Los triángulos ABQ y CDP son rectángulos e isósceles, por lo que el triángulo PQR que comparte ángulos con ellos también es rectángulo e isósceles. Con esto, ya sea utilizando el teorema de Pitágoras o sabiendo que la altura sobre la base PQ debe medir $\frac{PQ}{2}$, podemos obtener el área del triángulo PQR que es de 1 cm^2. Para obtener el área de $DRQC$ restamos al área de CDP la de PQR, por lo que el resultado final es: $\frac{5 \cdot 5}{2} - 1 = 11{,}5\ \text{cm}^2$.

50 Nivel III CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

(D) Está claro que dichos números deben tener dos cifras. Sea $[ab]$ un número que cumple dicha propiedad, entonces, $10a + b = 4(a + b)$, es decir, $6a = 3b$ y, por tanto, $2a = b$.
Como a y b son cifras, ya hemos encontrado todos los números: 12, 24, 36, 48.

Soluciones - Nivel IV

1 Nivel IV **CP I**

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

$\boxed{P}$ $\boxed{Q}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: “Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro”. Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

A) 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

(A) La afirmación será falsa si hay una carta con vocal por un lado y número impar por el otro. La única carta que puede cumplir eso es la que tiene un 3, por lo que Alicia le dio la vuelta e hizo notar que tenía una vocal.

2 Nivel IV CP I

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 1275$ tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

A) 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

(C) Una posibilidad de no asegurar que haya 10 tarjetas con la misma etiqueta es coger todas las numeradas del 1 al 9 y 9 de cada una de las numeradas del 10 al 50, es decir, $1 + 2 + 3 + ... + 9 + 9 \cdot 41 = 414$. Así pues, si cogemos 415 tarjetas hemos asegurado que al menos hay 10 escritas con la misma etiqueta.

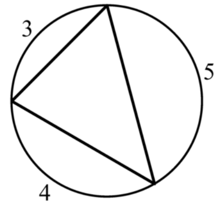
3 Nivel IV CP II

Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

A) 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

(E) Antonio descansa los días 4, 8, 12,..., es decir los días múltiplo de 4. Beatriz descansa los días 8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, etc.
Así pues, entre otros, Beatriz descansa los múltiplos de 10 y como Antonio descansa los múltiplos de 4, coincidirán en los días múltiplos de 20, ya que mcm $(4, 10) = 20$. Por otra parte, Beatriz descansa los múltiplos de 10 menos 2 que son múltiplos de 4 alternativamente (es decir, uno de cada dos). Los días impares que descansa Beatriz nunca coincidirán con días de descanso de Antonio.
En total, hay 50 múltiplos de 20 y 100 múltiplos de 10 menos 2, por lo que el número total de días de coincidencia en el descanso será $50 + 50 = 100$.

4 Nivel IV CP II

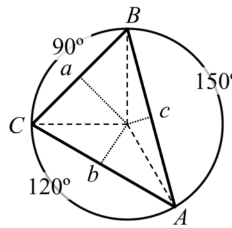


Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?

A) 6 **B)** $\dfrac{18}{\pi^2}$ **C)** $\dfrac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

D) $\dfrac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

(D) Una forma cómoda de resolver el problema pasa por determinar, en primer lugar, los ángulos centrales que subtienden estos arcos. Como el valor del ángulo central es proporcional al arco que determina, sigue que son:



$3\cdot\dfrac{360}{12}$, $4\cdot\dfrac{360}{12}$ y $5\cdot\dfrac{360}{12}$ con lo que los ángulos del triángulo serían en cada caso la mitad, es decir 45º, 60º y 75º. Así pues, el ángulo central desde el que se ve el arco de longitud 3 es de 90º, por lo que $\dfrac{2\pi r}{4}=3 \Rightarrow r=\dfrac{6}{\pi}$ y el problema se reduce a hallar el área de un triángulo de ángulos 45º, 60º y 75º, inscrito en un círculo de radio $\dfrac{6}{\pi}$.

$$\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow b=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi}; \quad \operatorname{sen}45^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{6}{\pi}} \Rightarrow a=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

El área es:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\operatorname{sen}75^\circ=\frac{18}{\pi^2}\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{\pi^2}(3+\sqrt{3})$$

5 Nivel IV CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

A) $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

(D) Llamando l_1 a la longitud de la vela larga y l_2 a la otra, al cabo de 4 horas se habrá consumido $\frac{4l_1}{7}$ en la primera **y** $\frac{4l_2}{10}$ en la segunda, por lo que las longitudes que quedaron son $\frac{3l_1}{7}$ y $\frac{3l_2}{5}$. Como nos dicen que $\frac{3l_1}{7} = \frac{3l_2}{5}$, sigue que $\frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{7}$.

6 Nivel IV CP III

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

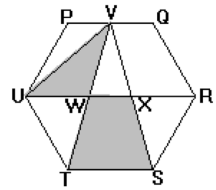
A) 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

(A) Hay g gatos y p perros en Madrid y nos piden $\frac{g}{g+p}$.

Se creen que son gatos $\frac{90}{100}g + \frac{10}{100}p$ que supone $\frac{20}{100}(g+p)$.

Así pues, $9g + p = 2g + 2p$, es decir, $7g = p$, por lo que $\frac{g}{g+p} = \frac{g}{8g} = \frac{1}{8} = 12{,}5$ %.

7 Nivel IV CP IV



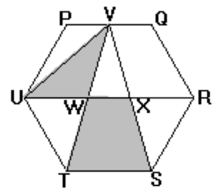
En el hexágono regular *PQRSTU* de la figura, *V* es el punto medio de *PQ*, y *W* y *X* son los puntos que se señalan.

¿Cuánto vale $\dfrac{\text{Área}\, WXST}{\text{Área}\, UVW}$?

A) 2 **B)** 3 **C)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

(A) Llamando 1 al lado del hexágono, $WX = \dfrac{1}{2}$ por lo que $UW = \dfrac{1}{2}\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.



Como el segmento perpendicular bajado desde *V* a *TS* mide la altura sobre la base *UW* del triángulo más la altura del trapecio, ambas iguales, el cociente pedido será la suma de las bases del trapecio entre la base del triángulo, es decir, $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{3}{4} = 2$.

8 Nivel IV CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, a_n es la media aritmética de los $n - 1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de a_2?

A) 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

(E) Si en una sucesión, a partir del tercer término cada uno es la media aritmética de los anteriores, la sucesión verifica que $a_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$ y

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_n + a_n}{n} = a_n,$$

por lo que la sucesión a partir del tercer término es constante.

Así pues, $a_3 = a_{2000} = 99$ y $99 = \dfrac{19 + a_2}{2}$, de donde $a_2 = 179$.

9 Nivel IV CP V

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

(A) Si $10a + b$ ($a \neq 0$) es el número pedido y ab el producto de sus cifras, tenemos que $10a + b - ab = a(10 - b) + b$ que nunca será negativo, por lo que no habrá ningún número de dos cifras menor que el producto de sus cifras.

10 Nivel IV CP V

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, sen x es igual a:

A) $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

PRIMERA SOLUCIÓN

(E) Sabemos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, igualdad que se da si $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, (observar que a, $b > 0$) por lo que $\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

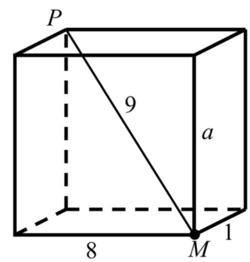
(E) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ y $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Así pues, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \dfrac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$, con lo que al ser a y b positivos, es $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

11 Nivel IV CP VI

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto P. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto P. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

A) $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$



(D) Con los datos conocidos podemos colocar la mosca en el vértice de un ortoedro del que conocemos la longitud de la diagonal, 9 m, y la de dos aristas, 1 m y 8 m.
Entonces, si llamamos a, a la longitud de la otra arista, se tiene que
$9^2 = 1^2 + 8^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ m.

12 Nivel IV CP VI

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si P_1 es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y P_2 la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

A) 0 **B)** $\frac{1}{2002}$ **C)** $\frac{1}{2001}$ **D)** $\frac{2}{2001}$ **E)** $\frac{1}{1000}$

(C) $P_1 = 2\cdot\frac{1001}{2002}\cdot\frac{1000}{2001} = \frac{1000}{2001}$ y $P_2 = 2\cdot\frac{1001}{2002}\cdot\frac{1001}{2001} = \frac{1001}{2001}$

Por lo tanto $P_2 - P_1 = \frac{1001}{2001} - \frac{1000}{2001} = \frac{1}{2001}$.

13 Nivel IV CP VII

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.
1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

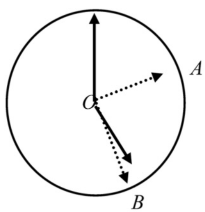
(D) Las afirmaciones 1, 3 y 4 se contradicen mutuamente. Si 1 fuese verdadera también deberían serlo 3 y 4, que es contradictorio. Luego 1 es falsa. Y entonces 3 también es falsa, lo que hace que 4 sea verdadera. Las afirmaciones 2 y 5 son verdaderas. Por tanto hay tres afirmaciones verdaderas, la 2, la 4 y la 5.

14 Nivel IV CP VII

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

(B) A las 5 de la mañana, las agujas del reloj forman un ángulo de 150º. Como la aguja de las horas recorre 30º en 60 minutos y la de los minutos 360º en ese tiempo, al cabo de t minutos recorrerán $\frac{t^{o}}{2}$ y $6t^{o}$ respectivamente.



Nos piden calcular t para que el ángulo $A\hat{O}B$ sea de 90º. Así pues, $\frac{t}{2} + 150 - 6t = 90$, que nos conduce a $t = \frac{120}{11}$ minutos, es decir, $\frac{2}{11}$ horas.

15 Nivel IV CP VIII

El menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

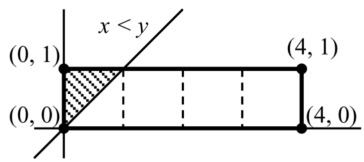
(C) Como $10^n - 1$ es múltiplo de 9 para cualquier entero positivo n, bastará hallar el menor entero positivo n para el que $10^n - 1$ sea múltiplo de 7 y lo más cómodo es ir dividiendo 99 … 9 entre 7 hasta obtener un resto 4 (pues en el paso siguiente obtendríamos resto cero, 49 : 7 = 7) y eso tiene lugar para 99999 por lo que habría un 9 más, es decir, la respuesta es $n = 6$.

16 Nivel IV CP VIII

Elegimos al azar un punto (x, y) del rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 1) y (0, 1). ¿Cuál es la probabilidad de que x sea menor que y?

A) $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

(A) El punto (x, y) verificará $x < y$ sólo si está en la zona rayada, y como el área de esta es $\frac{1}{2}$ y el área del rectángulo es 4, la probabilidad pedida es $\frac{1}{8}$.



17 Nivel IV CP IX

Si x e y son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

(C) Si escribimos los complejos en forma polar:

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{2\pi}{3}} \qquad y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

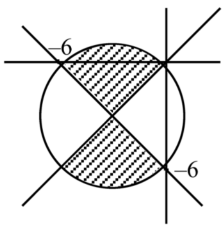
$$x^9 + y^9 = 1^9_{9\cdot\frac{2\pi}{3}} + 1^9_{9\cdot\frac{4\pi}{3}} = 1_{6\pi} + 1_{12\pi} = 1 + 1 = 2 \neq -1$$

18 Nivel IV CP IX

Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y T el conjunto de los puntos (x, y) tales que $f(x) + f(y) \le 0$ y $f(x) - f(y) \le 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto T, es:

A) 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

(E) Por las condiciones dadas, tenemos que
$f(x) + f(y) = x^2 + 6x + 1 + y^2 + 6y + 1 = (x + 3)^2 + (y + 3)^2 - 16 \le 0.$
Además $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 + 6(x - y) = (x - y)(x + y + 6) \le 0$. Así pues, al ser T el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos desigualdades dadas, tenemos que T es la intersección de los conjuntos



$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x + 3)^2 + (y + 3)^2 \le 16\}$ y

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \begin{array}{c} x - y \ge 0 \\ \text{y} \\ x + y + 6 \le 0 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{c} x - y \le 0 \\ \text{y} \\ x + y + 6 \ge 0 \end{array} \right\}$$

donde A es el interior de un círculo y B una región del plano determinado por rectas perpendiculares.

Al dibujar el conjunto T nos encontramos con que T está formado por dos cuartos de círculo de radio 4 por lo que su área será

$\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi \approx 25{,}13$ con lo que la respuesta será E.

19 Nivel IV CP X

La suma de 49 números enteros consecutivos es 7^5. ¿Cuál es su mediana?

A) 7 **B)** 7^2 **C)** 7^3 **D)** 7^4 **E)** 7^5

(C) La suma de n números enteros consecutivos, siendo n impar, es $S_n = \text{Me} \cdot n$, donde Me es el valor central de la serie. Como $S_n = 7^5$ y $n = 49$, $\text{Me} = \dfrac{7^5}{49} = 7^3$.

20 Nivel IV CP X

Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

E	K	4	7

A) Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

(C) Si Alicia da la vuelta a la carta E y observa que por detrás hay un número par y da la vuelta a la carta 7 y observa que por detrás no hay una vocal, ha comprobado que Pedro dice la verdad pues por detrás de las cartas K y 4 puede haber cualquier número y cualquier letra respectivamente, que no va a influir en la veracidad de lo dicho por Pedro. Por tanto, Alicia tiene que dar la vuelta, como mínimo, a dos cartas, la E y la 7.

21 Nivel IV CP XI

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

A) Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

(C) En la tabla adjunta, llamamos diferencial semanal a la diferencia entre los días de la semana correspondientes a días del mes con el mismo número. Y este número es el número que sobrepasa a 28 (múltiplo de 7) el número de días del mes anterior. Por ejemplo, el diferencial semanal de febrero es tres porque el 12 de febrero cae tres días de la semana después que el correspondiente al 12 de enero. Y es así porque enero tiene 31 días (28 + 3). Los meses que tienen el mismo número-módulo 7 coinciden el número de día del mes con el día de la semana. Así en febrero, marzo y noviembre coinciden el número de día y de semana. Igual ocurre con enero y octubre, abril y julio y septiembre y diciembre. Los meses de mayo, junio y agosto no coinciden con ningún otro mes del año. Si el 13 de febrero fue martes, hay otros dos "treces" que caen en martes: marzo y noviembre, y éste es el número máximo de "martes y 13" que puede haber en un año.

Si el año es bisiesto, el máximo número de meses coincidentes también es tres, en este caso, enero, abril y julio.

Mes	Nº de días	Diferencial semanal		Diferencial semanal acumulado		Módulo 7	
		Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto	Normal	Bisiesto
Enero	31	–	–	–	–	0	**0**
Febrero	28/29	3	3	3	3	**3**	3
Marzo	31	0	1	3	4	**3**	4
Abril	30	3	3	6	7	6	**0**
Mayo	31	2	2	8	9	1	2
Junio	30	3	3	11	12	4	5
Julio	31	2	2	13	14	6	**0**
Agosto	31	3	3	16	17	2	3
Septiembre	30	3	3	19	20	5	6
Octubre	31	2	2	21	22	0	1
Noviembre	30	3	3	24	25	**3**	4
Diciembre	31	2	2	26	27	5	6

22 Nivel IV CP XI

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

A) 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

(B) Nadal gana el partido en cualquiera de estas situaciones: NN, NFN o FNN representando por N o F que Nadal o Federer ganen un set.

Así pues, la probabilidad de que Nadal gane el partido es

$$p=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\cdot 2=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{9}{5}=\frac{81}{125}=0{,}648\ .$$

23 Nivel IV CP XII

¿Cuáles son las dos últimas cifras de 51^{48}?

A) 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

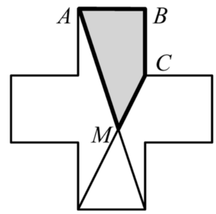
(E) $$51^{48}=(50+1)^{48}=\binom{48}{0}50^{48}+\binom{48}{1}50^{47}+\ldots+\binom{48}{46}50^2+\binom{48}{47}50+\binom{48}{48}.$$

De todos los términos de este desarrollo, los únicos que pueden influir en las dos últimas cifras del resultado son los dos últimos, ya que los anteriores tienen un factor potencia de 10 con exponente mayor o igual que 2:

$$\binom{48}{47}50+\binom{48}{48}=48\cdot 50+1=2400+1=2401$$

Así pues, lo que las dos últimas cifras de 51^{48} son 01.

24 Nivel IV CP XII



Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM*?

A) $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

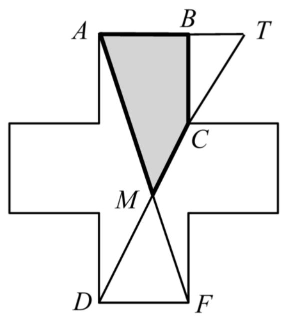
D) 20 **E)** $\frac{62}{3}$

(C) Prolongando *MC* hasta cortar a la prolongación de *AB* en *T*, tenemos que el triángulo *BCT* es semejante al *ADT* con razón de semejanza $\frac{BC}{AD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ por lo que, llamando $BT = x$, es $4 + x = 3x$, $x = 2$ y $AT = 6$.

Por otra parte, los triángulos *ATM* y *MDF* son semejantes con razón de semejanza $\frac{AT}{DF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, de donde, llamando *h* a la altura de *MDF* trazada desde *M*, es $h + \frac{3}{2}h = 12, \quad h = \frac{24}{5}$.

Área *MDF* = $\frac{48}{5}$; Área *ATM* = $\frac{48}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{108}{5}$;

Área sombreada = $\frac{108}{5} - 4 = \frac{88}{5}$.



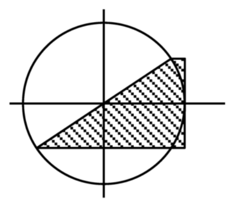
25 Nivel IV CP XIII

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado *c,* si *c* es media geométrica de las diagonales?

A) 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

(B) Sean *a* y *b* las diagonales y *c* el lado del rombo. Como *c* es media geométrica de *a* y *b*, tenemos que $c^2 = a \cdot b$. Aplicando el teorema de Pitágoras, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab$ Dividiendo esta expresión entre $a \cdot b$, tenemos $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$. Pero $\frac{a}{b}$ es la tangente del ángulo mitad del ángulo agudo del rombo, por tanto, $\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} = 4$, y de aquí, $\text{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. Como α es menor que 45º, tg α es menor que 1, por tanto tg α = $2 - \sqrt{3}$, y $\alpha = 15º$. El ángulo agudo del rombo es el doble, es decir 30º.

26 Nivel IV CP XIII

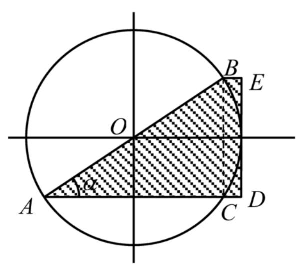


La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es α, el área de dicho trapecio es:

A) 2 sen α **B)** 2 sen^2 α **C)** 2 tg α

D) $2\text{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** sen 2α

(A) Dividiendo el trapecio como indica la figura, resulta que al ser *AB* un diámetro, el área del triángulo *ABC* será $\text{Área} = \frac{1}{2} 2\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha$, y el área del rectángulo *BCDE* será $(1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha$, con lo que el área del trapecio será:
$\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\alpha$.



27 Nivel IV CP XIV

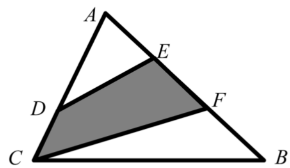
Uno de los números complejos z que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

A) $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3+3\,i$ **D)** $2+2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

(C) Como $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases} \Rightarrow z^2 = 6_{60^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = 18_{90^\circ} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3\sqrt{2}_{45^\circ} = 3+3i \\ z_2 = 3\sqrt{2}_{225^\circ} = -3-3i \end{cases}$

28 Nivel IV CP XIV

En la figura que te mostramos, el área del triángulo ABC es 9, DC es un tercio de AC y los puntos E y F dividen a AB en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 3 **B)** 4 **C)** 4,5

D) 5 **E)** 6

(B) $A_{CBF} = \dfrac{1}{3} A_{ABC} = 3$ porque tiene la misma base que el triángulo ABC y un tercio de su altura. Por otro lado, $A_{ADE} = \dfrac{2}{9} A_{ABC} = 2$ porque su base es dos tercios de la base del triángulo ABC y su altura un tercio de la altura del triángulo ABC.
El área del cuadrilátero es $9-3-2=4$.

29 Nivel IV CP XV

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

(B) En el producto de los 2011 primeros primos sólo hay un 2 y un 5. Por tanto sólo hay un 0 en el final del producto.

30 Nivel IV — CP XV

Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

A) 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

(C) En primer lugar observamos que 2012 es el 668º término de una progresión aritmética que comienza en 11 y tiene diferencia 3: $2012 = 11 + 667 \cdot 3$.

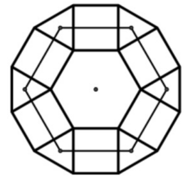
Por otro lado, $f(11)=11$; $f(14)=\dfrac{5}{6}$; $f(17)=-\dfrac{1}{11}$; $f(20)=-\dfrac{6}{5}$; $f(23)=11; ...$

Esto implica que si a_n es un término de la progresión aritmética. 11, 14, 17, 20, …

$$f(a_n)=\begin{cases} \dfrac{11}{5} & \text{si} \quad n=4k-3 \\ \dfrac{5}{6} & \text{si} \quad n=4k-2 \\ -\dfrac{1}{11} & \text{si} \quad n=4k-1 \\ -\dfrac{6}{5} & \text{si} \quad n=4k \end{cases} \qquad (k \in N)$$

Como $2012 = a_{668}$ y $668 = 4 \cdot 167$, entonces $f(2012)=-\dfrac{6}{5}$.

31 Nivel IV CP XVI



Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

A) $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

D) 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

(C) La relación entre la apotema y el lado de un hexágono regular es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es, $\cos 60º = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

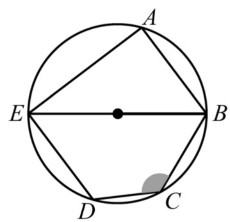
Obsérvese que en la figura, la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.

$A_P = L_P \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ y por tanto $A_G = A_P + 1 = \sqrt{3}+1$, así que $L_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}} A_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)$. Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}\text{Perímetro}\cdot\text{Apotema} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot L_G\cdot A_G = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1) =$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot(3+2\sqrt{3}+1) = 8\sqrt{3}+12 \text{ cm}^2.$$

32 Nivel IV CP XVI



En la circunferencia de diámetro EB las cuerdas AB y ED son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\dfrac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

A) 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º **E)** 140º

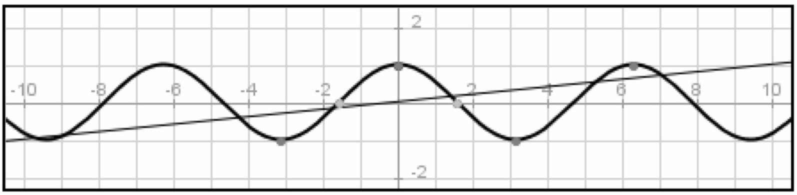
(C) Como el triángulo ABE es rectángulo en A, entonces los otros dos ángulos, E y B suman 90º y, como su cociente es 4/5, miden 40º y 50º respectivamente. Como las cuerdas AB y ED son paralelas, el ángulo $D\hat{E}B$ mide también 50º. Por tanto los arcos DE, EA y AB suman 80º + 100º + 80º = 260º. Y el ángulo $B\hat{C}D$ mide la mitad de esta suma, es decir, 130º.

33 Nivel IV CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10 \cdot \cos x$?

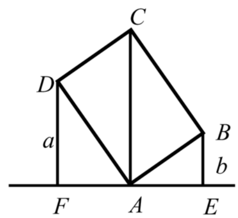
A) 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

(D) Las soluciones de la ecuación $x = 10 \cdot \cos x$ son tantas como puntos de corte tienen las funciones $f(x) = \dfrac{x}{10}$ y $g(x) = \cos x$. Puesto que la imagen de cos x es el intervalo $[-1, 1]$, los puntos de corte han de estar en el intervalo $[-10, 10]$.
Un esbozo de ambas funciones clarifica bastante la situación.



En el intervalo $[-10, 0]$ hay dos intervalos en los que la función cos x es negativa y además en cada uno tiene un mínimo igual a – 1. Estos intervalos son $\left[-10, -\dfrac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ y los mínimos se alcanzan en $-\pi$ y en -3π, por lo que las funciones tendrán cuatro puntos de corte. En el intervalo $(0, 10]$ hay dos intervalos en los que la función cos x es positiva, pero sólo tiene un máximo relativo en 2π que es igual a 1, por lo que las funciones tienen tres puntos de corte. En total, hay siete puntos de corte.

34 Nivel IV CP XVII

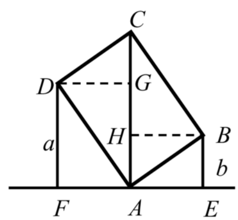


En la figura que observas, $ABCD$ es un rectángulo y los segmentos DF, BE y CA son perpendiculares a la recta FE. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud FE es:

A) $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

D) $\dfrac{2a+4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

(B) Trazando las paralelas a EF por los puntos D y B, cortan a AC en G y H, respectivamente. Como $ABCD$ es un rectángulo $FE = DG + HB = 2{\cdot}DG$.
Y aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ADC,



$$FE = 2DG = 2\sqrt{AG \cdot GC} = 2\sqrt{AG \cdot AH} = 2\sqrt{a \cdot b}\,.$$

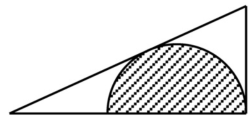
35 Nivel IV CP XVIII

La suma 1 + 2 + 3 +…+ n, de los n primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

A) 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

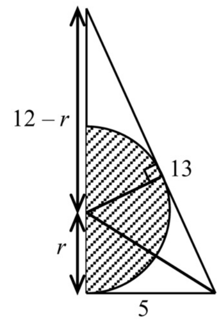
(E) La suma de los n primeros es $S_n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2} = 111k$ siendo $1 \le k \le 9$, entonces $n\cdot(n+1) = 222k$. Factorizando 222 obtenemos que $n\cdot(n+1) = 2\cdot 3\cdot 37\cdot k$, así que tenemos que el producto de n y n + 1 (dos números consecutivos) ha de ser múltiplo de 6 y de 37. Solo pueden ser el 36 y 37 $\Rightarrow S_{36} = \dfrac{36\cdot 37}{2} = 666$. Por tanto, la suma de las cifras será 18.

36 Nivel IV CP XVIII



Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?

A) $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$



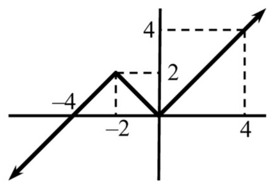
(B) Los triángulos inferiores son iguales, ya que los dos son rectángulos y tienen dos lados iguales, la hipotenusa que es común y el cateto que es el radio de la circunferencia. Así obtenemos que las medidas del triángulo superior son r, 8 y $12-r$. Aplicando Pitágoras concluimos $(12-r)^2=8^2+r^2 \Rightarrow r=\frac{10}{3}$.

37 Nivel IV CP XIX

Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f\left[f\left(f(x)\right)\right]=0$?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2

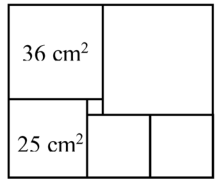
D) 1 **E)** 0



(A) La ecuación $f(x) = k$, con $k \in (0, 2)$ tiene tres soluciones, si $k = 0$ o $k = 2$ tiene dos soluciones y para cualquier otro valor de k, la ecuación tiene una única solución. Así $f\left[f\left(f(x)\right)\right]=0$ tiene dos soluciones para $f\left(f(x)\right)$, que son 0 y – 4. Ahora $f\left(f(x)\right)=0$ tiene dos soluciones para $f(x)$, que son $f(x) = 0$ y $f(x) = -4$, mientras que $f\left(f(x)\right)=-4$ tiene una única solución para $f(x)$, que es $f(x)= -8$. Por último, $f(x) = 0$ tiene dos soluciones para x mientras que $f(x)= -4$ y $f(x) = -8$ tienen una solución cada una. Por tanto, cuatro soluciones:

$$f\left[f\left(f(x)\right)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} f\left(f(x)\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases} \\ f(x)=-4 \Rightarrow x=-8 \end{cases} \\ f\left(f(x)\right)=-4 \Rightarrow f(x)=-8 \Rightarrow x=-12 \end{cases}$$

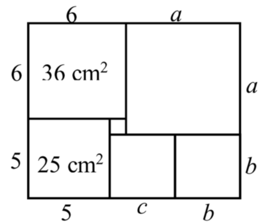
38 Nivel IV CP XIX



Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?

A) 50 **B)** 44 **C)** 46

D) 52 **E)** 48

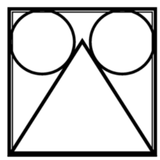


D) Nombramos con a, b, c los lados de los cuadrados:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ b+c+5=6+a \\ a-6=c-(a-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \quad =11 \\ -a+b+c=1 \\ 2a-b-c=6 \end{cases}$$

De donde se obtiene $a = 7$, $b = 4$, $c = 4$ y el perímetro pedido mide $2\cdot(6 + 7) + 2\cdot(6 + 5) = 48$ cm.

39 Nivel IV CP XX



La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?

A) 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(D) Prolongando uno de los lados del triángulo equilátero, que no sea el horizontal, hasta que dicha prolongación corte a un lado horizontal del cuadrado, resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, a, viene dada por la igualdad $\cos 30º=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{a}\Rightarrow a=4\sqrt{3}$, así que una de las lentillas está inscrita en el triángulo rectángulo de cateto 6, hipotenusa $4\sqrt{3}$ y el otro cateto $2\sqrt{3}$. El área de dicho triángulo es $\frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. Como en cualquier triángulo, el área es $\text{A}=\frac{p\cdot r}{2}$, siendo p el perímetro y r el radio del círculo inscrito. Por tanto, tenemos que: $6\sqrt{3}=\frac{6+6\sqrt{3}}{2}\cdot r \quad \Rightarrow r=\frac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}=3-\sqrt{3}$ dm.

40 Nivel IV CP XX

Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

A) 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

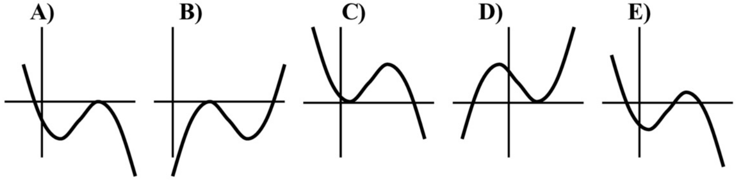
(A) Sin restricciones habría 8! formas de distribuir las tarjetas en los ocho sobres. Habrá que quitar aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!) y la tarjeta 3 (7!). Luego añadir aquellas donde están bien la 1 y la 2 (6!), ya que anteriormente las quitamos dos veces; y análogamente con la 1 y la 3 y luego con la 2 y la 3. Por último hay que descontar los ensobrados en los que estén bien las tarjetas 1, 2 y 3 (5!), ya que primero se restaron tres veces y luego se sumaron tres veces. Así que el número de distribuciones posibles es:

$$8!-3\cdot 7!+3\cdot 6!-5!=5!\left(8\cdot 7\cdot 6-3\cdot 7\cdot 6+3\cdot 6-1\right)=5!\cdot 217=27240\ .$$

41 Nivel IV CP XXI

Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



(A) Buscamos algunas de las características de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$. Por tanto, solo pueden ser A, C o E.

Cortes con el eje X. $(a-x)(b-x)^2=0$, tiene por soluciones $x=a$ y $x=b$. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A o C

Estudiamos el signo de la función

Por tanto, es la gráfica A.

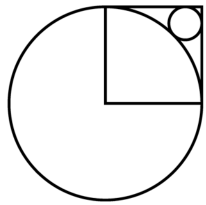
42 Nivel IV CP XXI

¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

A) $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

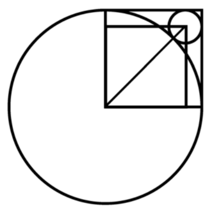
(C) Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101}-10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado. $\frac{(\sqrt{101}-10)(\sqrt{101}+10)}{\sqrt{101}+10}=\frac{101-100}{\sqrt{101}+10}=\frac{1}{\sqrt{101}+10}\approx\frac{1}{20}$.

43 Nivel IV CP XXII



La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:

A) 30 **B)** 40 **C)** 50
D) 60 **E)** 70



(C) Nos ayudamos del cuadrado interior cuyos vértices opuestos son los centros de las dos circunferencias. El lado de este cuadrado mide $10-r$ y la diagonal mide $10+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(10+r)^2=(10-r)^2+(10-r)^2$, resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $r_1=30+20\sqrt{2}$ (esta no puede ser ya que el radio de la circunferencia pequeña sería mayor que el de la grande) y $r_2=30-20\sqrt{2}$.

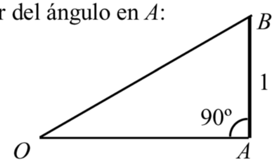
Comparando con el enunciado $a-b\sqrt{2}$, tenemos que $a=30$ y $b=20$.
Por lo tanto $a+b=50$.

44 Nivel IV CP XXII

Dos semirrectas que parten de un punto O forman un ángulo de 30º. Los puntos A y B están uno en cada una y AB = 1. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento OB?

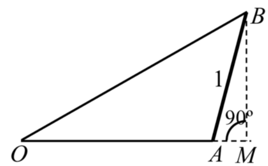
A) 1 **B)** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(D) Analicemos los posibles casos dependiendo del valor del ángulo en A:



[Caso 1] $O\hat{A}B = 90º$

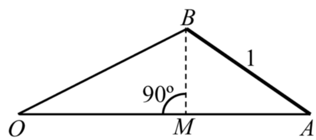
$$\text{sen}30º = \frac{1}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = 2$$



[Caso 2] $O\hat{A}B > 90º$

$$\text{sen}30º = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$



[Caso 3] $O\hat{A}B < 90º$

$$\text{sen}30º = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$

Por tanto, la longitud máxima posible del segmento OB es 2.

45 Nivel IV CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

(B) Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.

❖ Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

46 Nivel IV CP XXIII

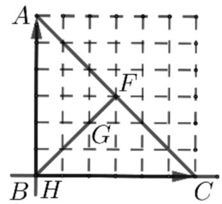
Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC, su circuncentro F, su baricentro G y su ortocentro H, respectivamente. Entonces:

A) $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

D) $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

PRIMERA SOLUCIÓN

(C) Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.



$a = 0 + 2i$, $b = 0 + 0i$ y $c = 2 + 0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\frac{0+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$.

Calculamos la suma $a + b + c$ que aparece en todas las respuestas.

$a + b + c = (0 + 2i) + (0 + 0i) + (2 + 0i) = 2 + 2i$

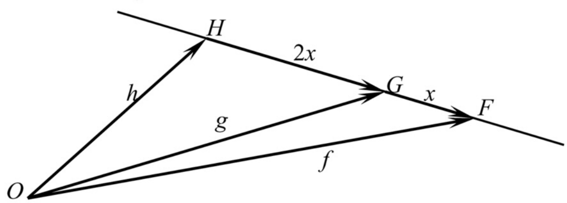
$f = 1 + i \Rightarrow 2f = 2 + 2i$ y como $h = 0 + 0i$, entonces $2f + h = 2 + 2i = a + b + c$.

Ninguna de las otras opciones se verifica.

SEGUNDA SOLUCIÓN

(C) Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g} = \vec{h} + 2\vec{x}$ y $\vec{f} = \vec{g} + \vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g} = 2\vec{f} + \vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\frac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\frac{a+b+c}{3} = 2f + h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



47 Nivel IV CP XXIV

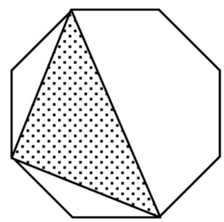
Sea una función f tal que $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, para cualesquiera enteros a y b.
Si $f(1) = 3$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ es:

A) 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

(A) Empezamos deduciendo el valor de $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9$. Deducimos ahora el valor de $f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27$.
Para acabar obtenemos el valor de $f(0)$ y sumamos los resultados obtenidos.
Como $f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot f(1)$ deducimos que $f(0) = 1$.
Por tanto, $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

48 Nivel IV CP XXIV

En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?



A) $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$

D) $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

(D) El número total de triángulos que se pueden formar es $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$. El número de triángulos que se pueden formar compartiendo dos lados del octógono es 8; y el número de triángulos que se pueden formar compartiendo sólo un lado del octógono son $8 \cdot 4 = 32$; (si elegimos un lado, de un total de ocho, para el tercer vértice sólo hay cuatro posibilidades). No puede haber un triángulo que comparta los tres lados con los lados del octógono. Así que en total hay $8 + 32 = 40$ triángulos que comparten al menos un lado con los lados del octógono y por tanto la probabilidad pedida es $\frac{40}{56} = \frac{5}{7}$.

49 Nivel IV CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

A) 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

(A) La de los n primeros enteros positivos es $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$. Así pues, $n \cdot (n + 1)$ debe ser igual al doble de una de las cinco posibles respuestas (4032, 4036, 4040, 4044, 4048). La única que lo cumple es $63 \cdot 64 = 2 \cdot 2016$. Y las demás ya no valen porque $64 \cdot 65 = 4160$ supera a todas ellas. La respuesta es 2016.

50 Nivel IV CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

A) 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

(C) La clave está en ver que 16 puntos solo se pueden conseguir con 5 partidos ganados y 1 empatado; 8 puntos (2 ganados y 2 empatados); 2 puntos (2 empatados). Hay tres escenarios posibles:

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	BD	B gana 2 y empata 2	8
C	A	B		CD	C gana 0 y empata 2	2
D	AD	BD	CD		D gana 0 y empata 5	5

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	B	B gana 2 y empata 2	8
C	A	BC		C	C gana 2 y empata 1	7
D	AD	BD	C		D gana 0 y empata 2	2

	A	B	C	D		PTOS
A		A	A	A	A gana 5 y empata 1	16
B	A		B	B	B gana 2 y empata 2	8
C	A	BC		CD	C gana 0 y empata 2	2
D	AD	BD	D		D gana 1 y empata 3	6

Como nos aseguran que en total hubo 5 empates, solo es válida la primera opción. Así pues, las puntuaciones fueron 16, 8, 2 y 5.